

足し続けると、答から遠ざかる

— 「収束する」と「近似する」は別の極限であり、漸近展開は $1/x$ 項めで最良になる：そこでの誤差は x のどんな冪よりも小さい — [論文211]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

級数の項を足していけば答に近づく——これは、ある種類の級数についてだけ正しい。本稿は、どの x でも発散するのに二十一桁を出す級数を測り、「収束する」と「近似する」が別の極限についての主張であることを数で書く。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、収束する級数は素直である。 e の級数の誤差は 0.218282 から 2.05×10^{-20} まで、一度も向きを変えずに落ちる（第2節）。第二に、 $E(x) = \int_0^\infty e^{-t}/(1+xt) dt$ の展開は、どの x でも発散する。 $x = 0.1$ では誤差が 10 項めで 1.770×10^{-4} まで落ちたあと、 30 項で 65.9 、 40 項で 1.63×10^7 へ登っていく（第3節）。第三に、止める場所には規則がある。最良の項数は $x = 0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01$ に対して $5, 10, 20, 50, 100$ で、ちょうど $1/x$ であり、そこでの誤差は $e^{-1/x}$ とほぼ等しい（第4節）。第四に、スターリングの級数でも同じ形が出る。最良の項数は $z = 2, 5, 10, 20$ に対して $7, 16, 32, 63$ で、 πz に一致する—— $z = 20$ での誤差は 9.43×10^{-57} である（第6節）。第五に、これが本稿の芯である。 x を止めて項数を増やせば発散し、項数を止めて x を小さくすれば誤差 $/x^2$ は零へ行き、誤差 $/x^3$ は 6.0 に落ち着く—— $6 = 3!$ 、すなわち次の係数そのものである（第7節）。

本稿の射程（scope note）：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ポアンカレによる漸近展開の定義、スターリング級数の発散、最適な打ち切りは、いずれも標準的である。ボレル和も超漸近も扱わない—— $e^{-1/x}$ の壁を越える手立てには触れない。ストークス現象を扱わない。摂動論の発散を論じない——本稿の級数は各項が有限である。論文35・39との関係：あちらで「高次になるほど発散が悪化する」と書いたのは各項（ループ積分）が発散する話であり、本稿は各項は有限なのに級数が発散する話である——「発散する」も別根である。論文197との関係：197は「収束する」が四つの別の主張であることを扱った——本稿が分けるのはその四つの内側ではなく、収束と漸近という、そもそも別の極限である。加えたのは最良の項数が $1/x$ であることを五つの x で測ったこと、そこでの誤差が $e^{-1/x}$ とほぼ等しいことを見たこと、その誤差が x のどんな冪よりも小さくなることを比で示したこと、スターリング級数で最良の項数が πz に一致することを四つの z で確かめたこと、二つの極限を同じ級数の上で別々に走らせ、片方が発散し片方が $3!$ に落ち着くのを見たことである。

1. 記法と位置づけ

級数 $\sum_n a_n x^n$ が関数 f に収束するとは、 x を止めて項数 $N \rightarrow \infty$ としたとき部分和が $f(x)$ に近づくことをいう。漸近展開であるとは、項数 N を止めて $x \rightarrow 0$ としたとき

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n = O(x^N)$$

となることをいう（ポアンカレ 1886）。動かす変数が違う。

位置づけ：論文197 では「収束する」が四つの別の主張であった——ここではその外側で、「収束する」と「近似する」が別の極限であることを見る。論文168 では、ルベグが買ったのは極限で閉じることであった——ここでも問題はどの極限かである。

2. 収束する級数は、素直である

検算 2.1： $e = \sum 1/n!$ の部分和。

項数	部分和	誤差
3	2.5	0.218282
5	2.7083333333333333333333333333	0.0099485
9	2.7182787698412698413	3.05862×10^{-6}
13	2.7182818282861685639	1.72877×10^{-10}
21	2.7182818284590452353	2.0503×10^{-20}

どの項も役に立ち、誤差は一度も向きを変えない。これが「級数を足す」という言葉に普通ついている像である。

3. どの x でも発散する級数

$E(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ を考える。 $1/(1+xt)$ を展開して項別に積分すると $\sum_n (-1)^n n! x^n$ を得るが、項 $n! x^n$ はどの $x \neq 0$ でも限りなく大きくなる。

検算 3.1： $x = 0.1$ 、真の値は 0.91563333393978808187606982（求積による）。

項数	項の大きさ	部分和	誤差
3	0.02	0.92	0.00436666
8	0.000504	0.915416	0.000217339
10	0.00036288	0.91545632	0.000177019
12	0.000399168	0.915420032	0.000213307
20	0.0121645100409	0.9076137084	0.00801963
30	88.4176199374	-64.9806812262	65.8963
40	20397882.0812	-16252520.1096	1.62525×10^7

観察 3.2

誤差は落ち、床に当たり、そこから限りなく登っていく。40 項も足すと、答は真の値と一桁も合っていない——3 項で止めておけば四桁合っていたのに。

4. 止める場所には、規則がある

検算 4.1：

x	最良の項数	そこでの誤差	$e^{-1/x}$
0.2	5	0.018289119	0.006737947
0.1	10	0.0001770194	4.539993×10^{-5}
0.05	20	1.14578×10^{-8}	2.0611536×10^{-9}
0.02	50	$1.7036434 \times 10^{-21}$	$1.9287498 \times 10^{-22}$
0.01	100	$4.6546742 \times 10^{-43}$	3.720076×10^{-44}

観察 4.2

最良の項数は **5, 10, 20, 50, 100**、すなわちちょうど $1/x$ である。そしてそこでの誤差は $e^{-1/x}$ の数倍に収まっている。項の大きさ $n! x^n$ が最小になる場所が、そのまま止めるべき場所であった。

観察 4.3

ここには「もっと精度が欲しい」という願いの入る余地が無い。 x を決めた瞬間に、到達できる精度が決まってしまう——足す手を増やしても、越えられない。

5. その誤差は、 x のどんな冪よりも小さい

検算 5.1 :

x	$e^{-1/x}$	x^5	比
0.2	0.006737946999	0.00032	21.05608437
0.1	$4.539992976 \times 10^{-5}$	1.0×10^{-5}	4.539992976
0.05	$2.061153622 \times 10^{-9}$	3.125×10^{-7}	0.006595691592
0.02	$1.928749848 \times 10^{-22}$	3.2×10^{-9}	$6.027343275 \times 10^{-14}$

観察 5.2

比は零へ行く。**5** を他のどんな数に替えても同じことが起きる—— $e^{-1/x}$ は x のすべての冪より速く小さくなるからである。ゆえにこの誤差は、級数のどの次数にも現れない。「もっと高い次まで計算する」という方法では、原理的に見えない量である。

6. スターリングの級数でも、同じ形が出る

$\log \Gamma(z) \sim (z - \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \sum_{n \geq 1} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}}$ もまた発散する。

検算 6.1 :

z	最良の項数	πz	そこでの誤差
2	7	6.28	3.9003289×10^{-7}
5	16	15.71	1.589869×10^{-15}
10	32	31.42	$2.5831777 \times 10^{-29}$
20	63	62.83	$9.4340912 \times 10^{-57}$

観察 6.2

最良の項数は πz に一致し、そこでの誤差は $e^{-2\pi z}$ の程度である。第4節とは何の関係も無い級数なのに、同じ形が出た——どちらも「項の大きさが最小になるところで止める」という一つの規則に従っている。

7. 芯：一つの言葉が、二つの別の極限を指している

同じ級数の上で、二つの極限を別々に走らせる。

検算 7.1 (x を止めて項数を増やす) : $x = 0.1$ で、10, 20, 30, 40 項の誤差は

$$1.77 \times 10^{-4}, \quad 8.02 \times 10^{-3}, \quad 65.9, \quad 1.63 \times 10^7.$$

収束しない。

検算 7.2 (項数を止めて x を小さくする) : 3 項 ($n = 0, 1, 2$) で止める。

x	誤差	誤差 / x^2	誤差 / x^3
0.2	0.02788911858	0.69722796	3.486139822
0.05	0.0006290900808	0.25163603	5.032720646
0.01	$5.771326698 \times 10^{-6}$	0.057713267	5.771326698
0.005	$7.353641287 \times 10^{-7}$	0.029414565	5.882913029

観察 7.3

真ん中の欄は零へ行き、右の欄は 6 に落ち着く。 $6 = 3!$ であり、これは足さなかった次の項の係数そのものである。つまりこの級数は漸近展開として完全に正しい——発散しているにもかかわらず。

観察 7.4

「収束する」と「近似する」は別の極限についての主張である。片方は x を止めて N を動かし、もう片方は N を止めて x を動かす。級数は両方であることも、片方だけであることも、どちらでもないこともある——そして役に立つかどうかを決めているのは後者のほうである。

8. 分離子と柵

検算 8.1 : 50 項ずつ使って、どこまで行けるか。

級数	50 項での誤差
$E(0.02)$ の展開 (どこでも発散)	1.70×10^{-21}
$\log 2$ の交代調和級数 (収束)	9.90×10^{-3}

(別の関数だから比較ではなく例示である。)

観察 8.2 (分離子)

「級数が使えるか」を決めているのは収束するかどうかではない——どの変数を動かす気があるかである。 x が小さいと決まっているなら、発散する級数のほうが速い。 x を動かすつもりなら、収束が要る。分けるにはどちらの極限を取るつもりかを言えばよい。

観察 8.3 (柵)

「項を足すほど良くなる」という言い方を囲っている柵は、級数が収束することである。柵の外では、この文は偽になる——良くなってから悪くなる。そして悪くなる速さは緩やかではない： $x = 0.1$ で 40 項も足せば、答は 1.6×10^7 もずれる。

観察 8.4

論文209では、近づいても届かないことを整数の剰余が保証した——ここでは逆に、届いてしまってから、また離れる。論文210では、四つの量が一つの名を分け合っていた——ここでは、二つの極限が「近づく」という一つの言葉を分け合っている。

9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 収束する級数は素直（検算2.1）：誤差は一度も向きを変えない。
2. 発散する級数は登り返す（検算3.1）：40項で 1.63×10^7 。
3. 最良の項数は $1/x$ （検算4.1）：5, 10, 20, 50, 100。
4. 誤差は x のどんな冪よりも小さい（検算5.1）：比は 6.03×10^{-14} へ。
5. スターリングでは πz （検算6.1）：7, 16, 32, 63。
6. 二つの極限は別（検算7.1・7.2）：発散するのに、比は $3!$ に落ち着く。
7. 収束は何も買わない（検算8.1）：50項で 10^{-21} 対 10^{-2} 。

結び：3項で四桁合っていた答は、40項まで足すと一桁も合わなくなる。それでもこの級数は間違っていない——漸近展開としては、次の係数の $3!$ まで正確に当てている。間違っていたのは級数ではなく、「足すほど良くなる」という思い込みのほうである。そして止めるべき場所には規則があり、そこで届く精度は $e^{-1/x}$ で、それは x のどんな冪よりも小さい——つまり級数のどの次数にも書かれていない。見えないものは、無いものではない：ただ、その言葉づかいの中に置き場所が無いだけである。

参考文献

1. Poincaré, H. (1886). Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta Mathematica*, 8.
2. Stieltjes, T. J. (1886). Recherches sur quelques séries semi-convergentes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3.
3. Dingle, R. B. (1973). *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*. London: Academic Press.
4. Olver, F. W. J. (1974). *Asymptotics and Special Functions*. New York: Academic Press.
5. Bender, C. M., Orszag, S. A. (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York: McGraw-Hill.
6. Berry, M. V. (1989). Uniform asymptotic smoothing of Stokes's discontinuities. *Proceedings of the Royal Society A*, 422.
7. Boyd, J. P. (1999). The devil's invention: asymptotic, superasymptotic and hyperasymptotic series. *Acta Applicandae Mathematicae*, 56.

8. 山岸勇輝 (2026). 山岸万有引力定数解凍理論 [論文35]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430118
9. 山岸勇輝 (2026). 山岸・プランク長幾何解凍理論 [論文39]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430490
10. 山岸勇輝 (2026). 次元解析は、二通りに破れる [論文120]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22036433
11. 山岸勇輝 (2026). ルベークが買ったのは、クラスの大きさではなく、極限で閉じることである [論文168]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093320
12. 山岸勇輝 (2026). 「収束する」は四つの別の主張であり、分けているのは何を捨てることを許すかである [論文197]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107590
13. 山岸勇輝 (2026). 体積が等しくても、切り貼りでは移れない [論文209]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22111317
14. 山岸勇輝 (2026). パルスの山は、入る前に出ることがある [論文210]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22111747

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)