

同じ列が、零へも無限へも行く

— 有限次元ではどのノルムでも答は同じになるのに、その保証の定数は次元とともに発散する：「近づく」は、ものさしを決めるまで決まらない — [論文215]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「近づく」は、列だけの性質ではない。本稿は $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ の三つのものさしを数で置き、有限次元では同値であることとその同値が保証する範囲が次元とともに壊れることを書く。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、三つのノルムの最良の定数は $\sqrt{n}$ と n である。 $n = 10^6$ では $\|x\|_1$ と $\|x\|_\infty$ が百万倍違う——それでも「同値」である（第2・3節）。第二に、その極端はどの向きにも無い。無作為な 20 万本のうち $\|x\|_1/\|x\|_2$ の最大は $n = 1000$ で 26.21 にとどまり、上限 31.62 には全座標が等しい一方向でしか届かなかった（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。 $x_n = (1/n, \dots, 1/n)$ は $\|x\|_1 = 1$ のまま動かないのに、 $\|x\|_2 = 1/\sqrt{n}$ も $\|x\|_\infty = 1/n$ も零へ行く——同じ列が、片方のものさしでは近づき、もう片方では一步も動かない（第4節）。第四に、関数ではもっと激しい。高さ $n^{1/4}$ ・幅 $1/n$ の尖りは、 $\sup$ ノルムで 100 へ登り、 L^2 で 0.01、 L^1 で 10^{-6} へ落ちる——同じ列が、零へも無限へも行く（第5節）。第五に、単位球の体積は $n = 50$ で ℓ^1 が ℓ^∞ の 3.04×10^{64} 分の 1 であった（第7節）。

本稿の射程（scope note）：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——有限次元でのノルムの同値、リースの補題、 ℓ^p の単位球の体積は、いずれも標準的である。同値定理を証明しない——本稿は定数を測るのであって、定理は引用する。一般のバナッハ空間を扱わない——出てくるのは ℓ^p と $C[0, 1]$ だけである。完備性も双対も扱わない。「どのノルムが正しいか」を論じない——書くのは選ぶと何が変わるかだけである。論文177 との関係：177 は量子子の順序を扱い、コンパクト性の柵を書いた——本稿の「同値」も定数が先か次元が先かの問題であり、同じ柵の裏側である。論文197 との関係：197 は「収束する」の四つの別根を扱った——本稿が変えるのは収束の種類ではなく距離の測り方である。体系には「単位球」が 25 編に現れるが、いずれも幾何的な球であり、ノルム空間の単位球は本稿が初出である。加えたのは最良の定数を六つの次元で並べたこと、無作為な標本がその極端に届かないことを測ったこと、同じ列が二つのノルムで別の答を返すのを書いたこと、尖りの列で三つのノルムが零・零・無限に分かれるのを見たこと、それを格子上の積分と突き合わせたこと、単位球の体積比を四つの次元で出したことである。

1. 記法と位置づけ

$x \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

とする。二つのノルムが同値であるとは、 $a\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq b\|x\|_A$ がある正の定数 a, b ですべての x について成り立つことをいう。有限次元では、どの二つのノルムも同値である。

位置づけ：論文182 は「次元の呪い」が一つの呪いではないことを扱った——本稿で呪われるのは同値の定数である。論文208 では曲率が次元と同じ仕事をした——ここでは次元だけが仕事をする。

2. 三つのノルムと、最良の定数

検算 2.1：不等式 $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ は常に成り立つ。逆向きの最良の定数は次の通りである。

n	$\ x\ _1/\ x\ _2$ の上限	$\ x\ _2/\ x\ _\infty$ の上限	$\ x\ _1/\ x\ _\infty$ の上限
2	1.414213562	1.414213562	2
10	3.16227766	3.16227766	10
100	10.0	10.0	100
1000	31.6227766	31.6227766	1000
10^6	1000.0	1000.0	10^6

検算 2.2：その極端がどれだけ稀かを測る。各次元で正規乱数を 200000 本つくり、 $\|x\|_1/\|x\|_2$ の最大を見る。

n	無作為な 20 万本での最大	$\sqrt{n}$	全座標が等しい向き
2	1.41421356	1.41421356	1.41421356
10	3.12127801	3.16227766	3.16227766
100	8.79139938	10.0	10.0
1000	26.20659420	31.62277660	31.62277660

観察 2.3

無作為な向きは、上限に近づきさえしない。上限に届くのは全座標が等しい一方向だけである——球面全体のうち一点にすぎない。「最悪の場合」と「典型的な場合」は別根である。

3. 同値なのに、定数は発散する

観察 3.1

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ はどの n でも真である。だから ℓ^1 と ℓ^∞ は有限次元では常に同値である。

検算 3.2：その保証が何を言っているか。

n	上限 ÷ 下限	食い違いうる桁数
1	1	0.00
10	10	1.00
10^4	10^4	4.00
10^6	10^6	6.00

観察 3.3

定理は n ごとに真であり、 n が大きいほど何も言わなくなる。百万次元では「二つのものさしは百万倍まで食い違ってよい」と言っているにすぎない——それでも「同値」という語は真である。語が真であることと、語が役に立つことは別である。

4. 芯：同じ列が、片方では近づき、片方では動かない

検算 4.1： $x_n = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)$ (n 個)。

n	$\ x\ _1$	$\ x\ _2$	$\ x\ _\infty$
1	1.0	1.0	1.0
10	1.0	0.31622777	0.1
100	1.0	0.1	0.01
10^4	1.0	0.01	0.0001
10^6	1.0	0.001	10^{-6}

観察 4.2

同じ列である。 ℓ^2 と ℓ^∞ では零へ行き、 ℓ^1 では一歩も動かない。「零に近づく」は列の性質ではない——列と、ものさしの組の性質である。

観察 4.3

ここで同値定理は破られていない。各 n では三つとも同値である——壊れているのは n を動かしたときである。論文211 と同じ形である：どちらの変数を動かすかを言うまで、答は決まらない。

5. 関数では、零へも無限へも行く

区間 $[0,1]$ 上で、高さ $n^{1/4}$ ・ 幅 $1/n$ の尖り f_n をとる。

検算 5.1 :

n	sup ノルム	L^2 ノルム	L^1 ノルム
10	1.7782794	0.56234133	0.17782794
100	3.1622777	0.31622777	0.031622777
10^4	10.0	0.1	0.001
10^8	100.0	0.01	10^{-6}

観察 5.2

同じ列が、一つのものさしでは無限へ、二つのものさしでは零へ行く。ここではもはや「食い違う倍率」の問題ではない——収束するかどうかで意見が割れている。そしてこれは無限次元だからできることである：有限次元では、こうはならない。

6. 数値でも確かめる

検算 6.1：尖りを 400 万点の格子で実際に積分し、閉じた形と突き合わせる。

n	sup (格子)	L^2 (格子)	閉じた形	相対誤差
10	1.77827941	0.5623413252	0.5623413252	0
100	3.16227766	0.3162277660	0.3162277660	0

観察 6.2

格子と閉じた形が一致した。前節の表は式の上の話ではなく、実際に積分して出た数である。

7. 単位球を測る

検算 7.1： $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ の単位球の体積。

n	ℓ^1	ℓ^2	ℓ^∞	ℓ^1/ℓ^∞
2	2.0	3.1415927	4.0	0.5
5	0.26666667	5.263789	32.0	0.0083333333
10	0.00028218695	2.550164	1024.0	2.7557319×10^{-7}
50	$3.7019019 \times 10^{-50}$	$1.7302192 \times 10^{-13}$	1.1258999×10^{15}	$3.2879494 \times 10^{-65}$

観察 7.2

ℓ^1 の球は ℓ^∞ の球の $1/n!$ である。 $n = 50$ では 3.04×10^{64} 分の 1——「同値」な二つのものさしの単位球が、体積で六十四桁違う。そして ℓ^2 の球は $n = 50$ で 1.73×10^{-13} にまで縮む：論文182 が測った「次元の呪い」が、ここではものさしの選び方の呪いとして現れている。

8. 分離子と柵

観察 8.1（分離子）

「近い」を分けているのはどのノルムで測るかである。有限次元では選び方が答を変えない——ただしどれだけ変えないかは次元とともに悪くなる。無限次元では選び方が答を変える——収束するかしないかまで変える。

観察 8.2（柵）

「どのものさしで測っても同じ」という言い方を囲っている柵は、次元が有限であることである。同じ柵の裏側にリースの補題がある：閉じた単位球がコンパクトなもの、次元が有限なときだけである。二つは同じ一つの柵である——同値を保証していた定数が発散する場所が、球のコンパクト性が失われる場所である。

観察 8.3

論文177 は量子子の順序が中身のすべてだと書いた——本稿の「同値」も定数が先か次元が先かである。 n を決めてから定数を探せば、いつでも見つかる。定数を先に決めて、すべての n で通用するものを探せば、無い。同じ文が、順序を入れ替えるだけで真から偽へ変わる。

9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 最良の定数は $\sqrt{n}$ と n （検算2.1）。
2. その極端は一方向だけ（検算2.2）：無作為 20 万本で 26.21 対 31.62。

3. 同値なのに定数は発散（検算3.2）： 10^6 次元で六桁。
4. 同じ列が片方で動かない（検算4.1）： $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ のまま。
5. 関数では零へも無限へも（検算5.1）： 100 と 0.01 と 10^{-6} 。
6. 格子と閉じた形が一致（検算6.1）。
7. 単位球は 3.04×10^{64} 分の 1 （検算7.1）。

結び：「この列は零に近づく」という文は、列だけでは意味を持たない。 ℓ^1 で測れば動かず、 ℓ^2 で測れば近づく——同じ数の並びについて、である。有限次元ではこの差は倍率の差にとどまり、ものさしを取り替えても結論は変わらない。ところがその「変わらない」を保証していた定数は、次元とともに発散する——そして発散しきった先では、同じ列が零へも無限へも行く。定理が破れたのではない：定理が守っていた範囲を、こちらが出たのである。

参考文献

1. Riesz, F. (1918). Über lineare Funktionalgleichungen. *Acta Mathematica*, 41.
2. Banach, S. (1932). *Théorie des opérations linéaires*. Warsaw.
3. Conway, J. B. (1990). *A Course in Functional Analysis*. Second edition. New York: Springer.
4. Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*. Second edition. New York: McGraw-Hill.
5. Ball, K. (1997). An elementary introduction to modern convex geometry. In *Flavors of Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.
6. Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer.
7. 山岸勇輝 (2026). 量子子の順序が、中身のすべてである [論文177]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098103
8. 山岸勇輝 (2026). 「次元の呪い」は一つの呪いではない [論文182]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22104170
9. 山岸勇輝 (2026). 「収束する」は四つの別の主張であり、分けているのは何を捨てることを許すかである [論文197]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107590
10. 山岸勇輝 (2026). 曲率は、次元と同じ仕事をする [論文208]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22111071
11. 山岸勇輝 (2026). 足し続けると、答から遠ざかる [論文211]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22111772
12. 山岸勇輝 (2026). 「戻ってくる」には別根がある [論文213]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119380
13. 山岸勇輝 (2026). レンズは明るくできるが、明るさは増やせない [論文214]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119392

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)