

近づいているのに、一步も近づいていない

— 弱く近づくことと強く近づくことは別であり、正規直交列は零へ弱収束しながら大きさを1に保つ：そして二乗を取ると、極限は0ではなく平均の半分になる — [論文216]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

「近づく」には、距離が縮むという意味と、どの試験でも差が消えるという意味がある。本稿は二つを数で分け、後者だけが起きて前者は一步も起きない列を測る。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、正規直交列 e_n はどの固定した試験でも零へ行く。 $y_k = 1/k$ に対して $1/n$ 、 $y_k = 2^{-k}$ に対して 2^{-n} へ落ちる——それでも $\|e_n\|$ はいつでも正確に1である（第2節）。第二に、有限個の試験には決して見えない。 $\mathbb{R}^{1000}$ で50本の試験を用意しても、全部の読みが 10^{-15} で長さ1のベクトルが取れる（第3節）。第三に、関数でも同じである。 $f_n(x) = \sin(2\pi nx)$ の L^2 の大きさはどの n でも0.7071067812なのに、試験積分は n に反比例して零へ落ちる（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。 f_n は零へ弱収束するのに、 f_n^2 の試験積分は0.859140831213へ行き、これは $\frac{1}{2} \int e^x = 0.859140914230$ である——弱極限の二乗は0、二乗の弱極限は平均の半分（第5節）。第五に、有限次元では単位ベクトルは隠れられない。 $\mathbb{R}^N$ の長さ1のベクトルは、必ずどれかの座標で $1/\sqrt{N}$ 以上を示す（第7節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——弱収束、リーマン＝ルベークの補題、ラドン＝リースの性質、バナッハ＝アラオグルの定理は、いずれも標準的である。弱位相を構成しない——扱うのは列であって、位相そのものではない。補償コンパクト性の理論を展開しない——第5節が触れるのはその最も簡単な一例である。双対空間も反射性も扱わない。均質化や乱流の閉じ方について何も主張しない。名前について：体系には「リースの定理」がすでに現れるが (論文197)、あれは測度収束から概収束する部分列が取れるという定理である——本稿のリースは弱収束にノルムの収束を足すと強収束になるという同じ人の別の定理である。論文215 との関係：215 で変えたのはどのものさしで測るかであった——本稿が変えるのは同じものさしで、何を試験と呼ぶかである。柵は同じ (次元が有限であること) だが、そこで壊れるものが違う。加えたのは正規直交列の試験値と大きさを並べたこと、有限個の試験に見えないベクトルを実際に作ったこと、振動列の大きさが動かないことと試験積分が落ちることを測ったこと、二乗の弱極限が平均の半分になることを三つの試験関数で確かめたこと、ノルムが揃えば差が消えることを測ったこと、有限次元での「隠れられなさ」の床が $1/\sqrt{N}$ であることを探索で確かめたことである。

1. 記法と位置づけ

内積空間の列 x_n について、強く近づく (ノルム収束) とは $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ のことをいい、弱く近づくとは、どの固定した y についても $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ となることをいう。強ければ弱い、逆は成り立たない。

位置づけ：論文197 は「収束する」の四つの別根を、何を捨てることを許すかで分けた——本稿が分けるのは何を見に行くかである。論文215 では「近い」がものさしの選択に依った——ここではものさしは一つであり、見方が二つである。

2. 正規直交列：試験は零へ、大きさは 1 のまま

検算 2.1 : e_n を ℓ^2 の第 n 座標ベクトルとし、二つの固定したベクトルで試験する。

n	$y_k = 1/k$ での試験値	$y_k = 2^{-k}$ での試験値	$\ e_n\ $
1	1.0	0.5	1.0
5	0.2	0.03125	1.0
20	0.05	9.5367432×10^{-7}	1.0
100	0.01	$7.8886091 \times 10^{-31}$	1.0
1000	0.001	$9.3326362 \times 10^{-302}$	1.0

観察 2.2

どの固定した試験も零へ行き、大きさは一度も動かない。 $\|e_n - 0\| = 1$ は永久に 1 である——「零に近づいている」と「零から距離 1 のまま」が、同じ列について同時に正しい。

3. 有限個の試験には、決して見えない

検算 3.1： $\mathbb{R}^n$ で k 本の試験を無作為に用意し、どの試験も零を読む長さ 1 のベクトルを探す。

n	k	試験値の最大	そのベクトルの長さ
10	5	6.661×10^{-16}	1.000000000000
100	5	3.886×10^{-16}	1.000000000000
1000	5	6.661×10^{-16}	1.000000000000
1000	50	1.887×10^{-15}	1.000000000000

観察 3.2

次元が試験の本数を上回るかぎり、試験に見えない向きが必ずある。弱収束とは、この抜け道を極限まで押し進めたものである——試験の本数は無限であってよいが、一本ずつ固定して使うので、いつでも「まだ見ていない向き」が残る。

4. 関数でも同じ：速く振動する列

検算 4.1： $f_n(x) = \sin(2\pi nx)$ を $[0, 1]$ 上でとる。

n	$\ f_n\ _{L^2}$	$\int f_n x$	$\int f_n e^x$	$\int f_n/(1+x)$
1	0.7071067812	-1.592×10^{-1}	-2.667×10^{-1}	7.401×10^{-2}
16	0.7071067812	-9.947×10^{-3}	-1.709×10^{-2}	4.972×10^{-3}
64	0.7071067812	-2.487×10^{-3}	-4.273×10^{-3}	1.243×10^{-3}
256	0.7071067812	-6.217×10^{-4}	-1.068×10^{-3}	3.108×10^{-4}

($1/\sqrt{2} = 0.7071067812$ 。積分は 2^{22} 点の格子による。)

観察 4.2

試験積分は n に反比例して落ち（リーマン＝ルベグ）、大きさは小数第十位まで動かない。波は速くなるだけで、小さくはなっていない——零へ行っているのは波そのものではなく、波と滑らかな関数との内積である。

5. 芯：二乗を取ると、極限が動く

検算 5.1：同じ f_n について、 f_n^2 を試験する。

n	$\int f_n^2 x$	$\int f_n^2 e^x$	$\int f_n^2/(1+x)$
1	0.250000000000	0.853734576864	0.344299547225
16	0.250000000000	0.859119662515	0.346564315769
256	0.250000000000	0.859140831213	0.346573554045
$\frac{1}{2} \int g$	0.250000000000	0.859140914230	0.346573590280
弱極限の二乗	0	0	0

観察 5.2

二乗の弱極限は、弱極限の二乗ではない。 $f_n \rightarrow 0$ （弱）なのに $f_n^2 \rightarrow \frac{1}{2}$ （弱）である——0ではなく平均の半分。三つの試験関数すべてで、 $\frac{1}{2} \int g$ と小数第七位まで一致した。

観察 5.3

ここに、弱く近づくことの値段がある。強い収束なら二乗も連続に運ばれるが、弱い収束は線形な操作しか通さない——二乗はエネルギーであり、分散であり、強度である。つまり「消えた」と言えるのは一次の量だけで、二次の量は残る。

観察 5.4

消えたように見えて残っているものが、どこへ行ったのかも言える——振動が速くなっただけで、エネルギーは一定である。本稿はここから均質化や乱流の閉じ方へは進まない：触れたのは最も簡単な一例だけである。

6. ノルムが揃えば、弱は強になる

検算 6.1 : $x_n = (1 - 1/n)e_1 + (1/n)e_2$ は e_1 へ弱収束する。

n	$\ x_n\ $	$\ e_1\ $	$\ x_n - e_1\ $
2	0.707106781187	1.0	0.707106781187
10	0.905538513814	1.0	0.141421356237
100	0.990050503762	1.0	0.014142135624
10000	0.999900005001	1.0	0.000141421356

観察 6.2

大きさが極限の大きさへ揃うと、差は零へ行く（リース）。第2節の正規直交列では大きさが1のまま、弱極限の大きさ0に揃わない——だから差も零へ行かない。「弱く近づく」に一つだけ足すと「強く近づく」になり、足すものは大きさが揃うことである。

7. 有限次元では、単位ベクトルは隠れられない

検算 7.1 : $\mathbb{R}^N$ の長さ1のベクトルを N 本の座標試験にかけたとき、最大の読みをどこまで小さくできるか。

N	理論上の最小値 $1/\sqrt{N}$	無作為 4000 本での最小
1	1.0	1.0
4	0.5	0.51812550
100	0.1	0.19566903
10000	0.01	0.03278663

観察 7.2

床は $1/\sqrt{N}$ であり、どの有限の N でも正である。長さ 1 のベクトルは、必ずどれかの試験に姿を見せる——床が零へ行くのは N が止まらないときだけで、そこが弱と強の分かれ目である。なお無作為な向きは床に届かない ($N = 10^4$ で 0.0328 対 0.01)：床に届くのは全座標が等しい向きだけである。

8. 分離子と柵

観察 8.1（分離子）

二つの「近づく」を分けているのは何を見に行くかである。

言い方	要求	e_n では
強く近づく	距離が零へ	起きない (1 のまま)
弱く近づく	どの固定した試験でも差が零へ	起きる
弱く近づき、大きさも揃う	上の二つ	起きない

観察 8.2（柵）

「近づけば近くなる」という言い方を囲っている柵は、次元が有限であることである。そして論文215と同じ柵でありながら、そこで壊れるものが違う：あちらではどのものさしを選ぶかが効きはじめ、こちらでは有限個の試験では足りなくなる。一つの柵の外に、別々の壊れ方が並んでいる。

観察 8.3

さらに一つ。弱い収束のもとでは線形な量だけが極限へ運ばれる——二乗を取った瞬間に、 0 が $\frac{1}{2}$ に変わる。「極限を取る」と「関数を通す」の順序が入れ替えられないのは、強い収束の外へ出たからである。論文177 の言い方でいえば、これもまた順序の問題であった。

9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 試験は零へ、大きさは 1 のまま (検算2.1)。
2. 有限個の試験には見えない (検算3.1) : 1000 次元 $\cdot$ 50 試験でも長さ 1 。
3. 振動しても大きさは動かない (検算4.1) : 0.7071067812 で不動。
4. 二乗の弱極限は平均の半分 (検算5.1) : 0.859140831213 対 0.859140914230 。
5. 大きさが揃えば差は消える (検算6.1) : 1.41×10^{-4} 。
6. 有限次元での床は $1/\sqrt{N}$ (検算7.1)。

結び : $e_1, e_2, e_3, \dots$ という列は、零へ近づいている。どんな固定した相手と内積を取っても、その値は零へ落ちていく。それでも、零からの距離は最初から最後まで 1 である——一歩も近づいていない。そして「近づいた」と言えたのは、一次の試験だけを見ていたからであった : 二乗を見た瞬間に、 0 のはずだった極限が平均の半分になる。消えたのは波ではなく、波と滑らかな相手との噛み合いだけである。波はそこにあり、ただ速すぎて、こちらの試験では見えなくなった。

参考文献

1. Riesz, F. (1907). Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 144.
2. Riesz, F. (1928). Sur la convergence en moyenne. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 4.
3. Banach, S. (1932). *Théorie des opérations linéaires*. Warsaw.
4. Alaoglu, L. (1940). Weak topologies of normed linear spaces. *Annals of Mathematics*, 41.
5. Murat, F. (1978). Compacité par compensation. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 5.
6. Tartar, L. (1979). Compensated compactness and applications to partial differential equations. In *Nonlinear Analysis and Mechanics*. London: Pitman.
7. Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*. Second edition. New York: McGraw-Hill.
8. Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer.

9. 山岸勇輝 (2026). 量子の順序が、中身のすべてである [論文177]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098103
10. 山岸勇輝 (2026). 「次元の呪い」は一つの呪いではない [論文182]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22104170
11. 山岸勇輝 (2026). 「収束する」は四つの別の主張であり、分けているのは何を捨てることを許すかである [論文197]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107590
12. 山岸勇輝 (2026). 足し続けると、答から遠ざかる [論文211]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22111772
13. 山岸勇輝 (2026). 「戻ってくる」には別根がある [論文213]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119380
14. 山岸勇輝 (2026). レンズは明るくできるが、明るさは増やせない [論文214]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119392
15. 山岸勇輝 (2026). 同じ列が、零へも無限へも行く [論文215]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119477

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)