

どこを触っても平らで、それでも合計は 4π である

— 「曲率」の別根：多面体の表面はいたるところ曲率ゼロだが、頂点の角の欠損を全部足すと必ず 4π になり、トーラスでは 0 になる — [論文224]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

多面体の表面は、どの点を取っても平らである——面の内側は平面であり、稜線も紙のように開けば平らになる。それでも曲率の総和は 4π である。本稿はこの二つがどちらも真であることを数で示す。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、正多面体はどれも 4π である。正四面体は π が四つ、立方体は $\pi/2$ が八つ、正八面体は $2\pi/3$ が六つ、正二十面体は $\pi/3$ が十二——どれも合計 **12.566370614359** である（第2節）。第二に、細かくしても合計は動かない。頂点を **12, 42, 162, 642** と増やすと、一点あたりの欠損は **1.047** から **0.0228** まで落ちるのに、合計は十四桁目まで同じであった（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。同じ作り方でトーラスを組むと、合計はちょうど 0 になる——正の欠損 **+12.3236** と負の欠損 **-12.3236** が完全に打ち消し合う（第5節）。第四に、負の欠損は「凹ませる」ことでは作れなかった。面の中心を押し込んでも欠損は **+2.384** のままである——凹みは裏返った錐にすぎず、負になるのは鞍点だけであった（第7節）。第五に、切り欠きを入れると負が出る。立方体の隅を欠くと三つの頂点がちょうど $-\pi/2$ を持ち、正の側は **+17.2788**、負の側は **-4.7124**——それでも合計は 4π であった（第7節）。

本稿の射程 (scope note)：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——デカルトの角欠損の定理（総和は 4π ）、オイラーの多面体定理、ガウス=ボンネの定理、そして両者が同値であることは、いずれも標準的である。定理を証明しない——本稿がするのは実際に多面体を組んで足すことだけである。離散微分幾何の一般論を作らない。曲面の分類も、種数の一般論も扱わない——現れるのは球面型とトーラス型の二つだけである。自己交差する多面体を扱わない。既刊との関係：既刊で「角欠損」が出るのはすべて滑らかな側である——論文27 は地表と時空のどちらの曲率かを分け、論文33 はウィグナー角が球面三角形の面積であることを示した。本稿は同じ量の離散側であり、曲率が一点に集まる場合を扱う。論文212 ではどんな地図も必ず何かを歪めるのであった——本稿では歪みを頂点に全部集めても、総額は変わらない。加えたのは四つの正多面体で欠損を直接足したこと、細分の列で一点あたりと合計を並べたこと、欠損と受け持ち面積の比を出したこと、トーラスで正負の相殺を測ったこと、凹ませても負にならないことを確かめたこと、切り欠きで $-\pi/2$ を三つ出したことである。

1. 記法と位置づけ

多面体の頂点における角の欠損を、 2π からその頂点に集まる面の角をすべて引いた残りとする。平らな紙の上では角は 2π ちょうどで、欠損は 0 である。

位置づけ：既刊で「角欠損」が現れるのは滑らかな側である——論文27 はどの多様体の曲率かを分け、論文33 はウィグナー角が面積であることを示した。本稿は離散側であり、曲率が点に集まる場合である。

2. 五つの正多面体

検算 2.1：座標から角を計算し、頂点ごとに足す。

立体	頂点	一点あたりの欠損	合計	オイラー標数
正四面体	4	π (3.141592653590)	12.566370614359	2
立方体	8	$\pi/2$ (1.570796326795)	12.566370614359	2
正八面体	6	$2\pi/3$ (2.094395102393)	12.566370614359	2
正二十面体	12	$\pi/3$ (1.047197551197)	12.566370614359	2

観察 2.2

一点あたりの欠損は四つとも違うのに、合計はどれも $4\pi = 12.566370614359$ である。頂点の数と一点あたりの欠損がちょうど釣り合っている——形は関係しない。

3. 細かくしても、合計は動かない

検算 3.1：正二十面体の面を四分割して単位球に射影する操作を繰り返す。

頂点	面	欠損の合計	最大の欠損
12	20	12.56637061435917	1.04719755119660
42	80	12.56637061435917	0.30934133337934
162	320	12.56637061435916	0.08227110788505
642	1280	12.56637061435901	0.02276083999584

観察 3.2

一点あたりの欠損は 1.047 から 0.0228 へ四十六分の一に落ちるのに、合計は十四桁目まで同じである。曲率は薄く広がっていくが、総額は一度も動かない。

4. 欠損は、曲率かける面積に近づく

単位球の上では曲率はいたるところ 1 であるから、頂点の欠損はその頂点が受け持つ面積に一致するはずである。

検算 4.1（頂点 642 の場合）：

頂点	欠損	受け持つ面積	比
次数 5 の頂点	0.02276083999584	0.02268154637897	1.0034959529
次数 6 の頂点	0.01889749080768	0.01885512890356	1.0022467046
合計	12.566370614359	12.506492733970	—

観察 4.2

比は 1 に寄っていく。欠損は曲率の積分のふるまいをする——ただし面積のほうは 12.5065 で 4π に足りない（多面体は球に内接していて少し小さい）のに、欠損のほうは最初から 4π ちょうどである。近似しているのは面積の側であって、総額の側ではない。

5. 芯：トーラスでは 0 になる

検算 5.1：同じ手つきでトーラス（ $R = 2$ 、 $r = 1$ 、 24×16 分割）を組む。

測ったもの	値
頂点・辺・面	384、1152、768
オイラー標数	0
欠損の合計	0
正の欠損の合計	+12.3235628615
負の欠損の合計	-12.3235628615

観察 5.2

外側は一方向に曲がり、内側は逆に曲がり、二つはちょうど打ち消し合う。球では 4π 、トーラスでは 0——合計は 2π かけるオイラー標数であり、形ではなく穴の数だけで決まる。

6. 面を切っても、何も変わらない

検算 6.1：立方体の一つの面を、中心に新しい頂点を置いて四つの三角形に切る。

	頂点	辺	面	欠損の合計
立方体	8	12	6	12.566370614359
一面を切ったもの	9	16	9	12.566370614359

観察 6.2

新しい頂点の欠損はちょうど 0 である——それは平らな面の上に置かれたからである。頂点も辺も面も増えたのに、 $V - E + F$ も合計も動かない——「頂点」は数えるための印であって、曲率の在処ではない。

7.凹ませても負にはならず、切り欠きで負になる

検算 7.1（外れた見込み）：立方体の一面の中心の頂点を、内側へ押し込む。

測ったもの	値
押し込んだ頂点の欠損	+2.38432329146618
その立体の最小の欠損	+0.97471550392835
欠損の合計	12.566370614359

観察 7.2

見込みは外れた。面を押し込んでもその頂点は錐のままであり、裏返っただけである——角の和は依然として 2π に届かず、欠損は正のままであった。欠損が負になるのは鞍点、すなわち角の和が 2π を超える場合だけである。

検算 7.3：立方体 $[0,2]^3$ から隅の小立方体を取り除く。

測ったもの	値
頂点・辺・面	14、36、24 （オイラー標数 2）
負の欠損を持つ頂点	3 個、いずれも $-\pi/2$
正の欠損の合計	+17.278759594744
負の欠損の合計	-4.712388980385
合計	12.566370614359

観察 7.4

三つの頂点が残りに逆らって数えられるのに、合計はやはり 4π である。凸である必要はまったくない——必要なのは穴が無いことだけである。

8. 分離子と柵

観察 8.1（分離子）

「曲率」を分けているのは、点での値として読むか、測度として読むかである。

どこで	曲率
面の内側	0
稜線の上	0（開けば平らになる）
頂点	欠損に等しい点質量

観察 8.2

点での値としてはほとんどいたるところ 0 であり、測度としては総額 4π である。頂点は測度ゼロの集合であるから、「ほとんどいたるところ消える関数」の積分が 4π になっている——矛盾ではなく、「曲率」という一語が二つの別の対象を指しているのである。

観察 8.3（柵）

「この面は平らである」という言い方を囲っている柵は、どの点についてか、それとも領域についてかである。柵の外では、この文は偽ですらなく、空である——223 の「この列はランダムである」、222 の「黒体のピークはここ」と同じ形である。

観察 8.4

そして動かないほうが本体である。一点あたりの欠損は細分で四十六分の一になり、頂点の数は 12 から 642 になり、凹ませれば符号すら変わる——それでも合計だけは一度も動かない。222 で「変数を換えて壊れるのは密度の値で、積分は壊れない」と書いたのと同じ形である。

9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 正多面体はどれも 4π (検算2.1) : 一点あたりは四つとも違う。
2. 細分しても合計は不変 (検算3.1) : 最大の欠損は $1.047 \rightarrow 0.0228$ 。
3. 欠損は曲率かける面積へ (検算4.1) : 比 1.0035 と 1.0022 。
4. トーラスでは 0 (検算5.1) : $+12.3236$ と -12.3236 が相殺。
5. 面を切っても不変 (検算6.1) : 新しい頂点の欠損は 0 。
6. 凹ませても負にならない (検算7.1) : $+2.384$ のまま。
7. 切り欠きで $-\pi/2$ が三つ (検算7.3) : それでも合計は 4π 。

結び : サイコロの表面を指でなぞってみる。どこを触っても平らである——面の上は平面であり、稜線もひと折りすれば紙に戻る。曲がっているところは、どこにも無い。それでも、八つの角にある欠けを足すと、ちょうど 4π になる。正四面体でも、正二十面体でも、六百四十二頂点の球でも、隅を欠いた立方体でも、同じ 12.566370614359 である。そして穴を一つ開けてトーラスにすると、今度はちょうど 0 になる。曲率はどこかに薄く塗られているのではなく、頂点という測度ゼロの点に、まとめて置かれている——だから「いたるところ平ら」も「総和 4π 」も、どちらも正しい。一語が二つの読み方を持っているだけである : 点での値と、測度と。そして形をどう変えても、総額だけは請求され続ける——変えられるのはどこに置くかであって、いくら置くかではない。

参考文献

1. Euler, L. (1758). *Elementa doctrinae solidorum*. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 4.
2. Gauss, C. F. (1828). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen: Dieterich.
3. Bonnet, O. (1848). Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *Journal de l'École Polytechnique*, 19.
4. Descartes, R. (1860). De solidorum elementis. In: Foucher de Careil, A. (ed.), *Œuvres inédites de Descartes*. Paris: Auguste Durand.
5. Pólya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.
6. Banchoff, T. F. (1970). Critical points and curvature for embedded polyhedra. *Journal of Differential Geometry*, 4.
7. Alexandrov, A. D. (2005). *Convex Polyhedra*. Berlin: Springer.
8. 山岸勇輝 (2026). 「曲率を測った」は、どの多様体の話か [論文27]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090333
9. 山岸勇輝 (2026). ウィグナー角は面積である [論文33]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090872
10. 山岸勇輝 (2026). どんな地図も、必ず何かを歪める [論文212]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22112104
11. 山岸勇輝 (2026). 「独立」は四つあり、たがいに何も言わない [論文220]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119838

12. 山岸勇輝 (2026). 太陽は、緑にも橙にも赤外にも輝いている [論文222]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120199
13. 山岸勇輝 (2026). 検定を全部通り、それでも点は十五枚の平面に乗っている [論文223]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120728

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)