

裏返して戻ってくる面にも、面積はある

— 「面積」の別根：メビウスの帯には面積があるのに面積形式が無い。向き付けを捨てても、総曲率は 2π のまま生き残る — [論文226]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

メビウスの帯には表と裏が無い。それでも面積はきちんとある。本稿は、何が壊れて何が壊れないかを数で分ける。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、法線は裏返って戻る。中心線を一周させると、始めと終わりの内積は -1.000000000000 であった——刻みを **200**、**2000**、**20000** と変えても同じである（第2節）。第二に、それでも面積はある。網を細かくすると **25.4022**、**25.4124**、**25.4130433381**、**25.4130750300** と一つの数に落ち着く（第3節）。第三に、二周すれば戻る。二重被覆では内積は $+1.000000000000$ 、面積はちょうど二倍である——向きは失われたのではなく、下では使えないだけである（第4節）。第四に、閉じた一方向曲面でも総曲率は生きている。四次元に置いたクラインの壺 ($V = 384$ 、 $E = 1152$ 、 $F = 768$) で角の欠損の総和は **0** であり、面の向きは決して揃えられなかった（第5節）。第五に、これが本稿の芯である。射影平面 ($V = 6$ 、 $E = 15$ 、 $F = 10$ 、 $\chi = 1$) では総和は **$6.283185307180 = 2\pi$** であり、一方向なのに総和はゼロでない——しかも総和は $2\pi V - \pi F$ 、すなわち座標を選ぶ前に数え上げだけで決まっている（第7節）。

本稿の射程 (scope note)：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——メビウスの帯、クラインの壺、射影平面、向き付け可能性、ガウス＝ボンネの定理、密度と形式の区別は、いずれも標準的である。定理を証明しない——本稿がするのは実際に曲面を組んで測ることだけである。曲面の分類定理を扱わない——現れるのは三つの曲面と一つの帯だけである。特性類も、ホモロジーによる判定も扱わない——向き付け不能の判定は面の向きを実際に揃えようとして失敗することによって行う。「向き付けできない」ことを証明しない——示すのは有限個の順序で試して必ず失敗することである。既刊との関係：論文67は「閉じた向き付け可能な曲面に対し」という仮定から出発した——その仮定をなぜ置くのかは問うていない。本稿はそれを外して何が起きるかを測る。論文224では曲率が測度であって点での値ではないことを見た——本稿は測度だからこそ向き付けが要らないことを見る。既刊の「メビウス」は論文167のメビウス変換であって、帯ではない——同じ名前でも別のものである。加えたのは法線を三通りの刻みで運んだこと、面積が収束することを測ったこと、二重被覆で符号と面積を確かめたこと、クラインの壺と射影平面で欠損の総和と向き付けの可否を測ったこと、矛盾する辺の数が探索順に依ることを八通りで確かめたこと、総和が $2\pi V - \pi F$ に一致することを三つの曲面で確かめたことである。

1. 記法と位置づけ

曲面が向き付け可能であるとは、連続に選べる法線があること、同じことだが、すべての面の向きを矛盾なく揃えられることをいう。本稿では後者を実際に試して判定する。

位置づけ：論文67は「閉じた向き付け可能な曲面に対し」で始まった——本稿はその形容詞を外す。論文224で曲率は測度であった——ここでは測度だから向きが要らない。

2. 法線は、裏返って戻る

検算 2.1：帯の中心線に沿って法線を連続に運び、一周したところで最初と比べる。

刻みの数	始めと終わりの内積
200	-1.000000000000
2000	-1.000000000000
20000	-1.000000000000

観察 2.2

法線は正反対を向いて戻る。刻みを百倍にしても同じ -1 である——これは近似の誤差ではなく、帯の性質である。「表」と「裏」を連続に選ぶことができない。

3. それでも、面積はある

検算 3.1：帯を三角形に割って、面積を足し上げる。

周方向の刻み	幅方向の刻み	面積
60	6	25.4022325578
240	24	25.4124093725
960	96	25.4130433381
1920	192	25.4130750300

観察 3.2

面積は一つの数に落ち着く。どの三角形の面積も正の数であり、向きを決める必要がどこにも無い——面積は向き付けが失われても生き残る。

4. 二周すれば、戻る

検算 4.1：

測ったもの	値
二周したときの内積	$+1.000000000000$
帯の面積	25.4130433381
二重被覆の面積	50.8260866763

観察 4.2

上にある曲面はちゃんと両面を持つ。向きは失われたのではなく、下では使えないだけである——「存在しない」と「ここでは選べない」は別のことである。

5. 閉じた一方向曲面：クラインの壺

検算 5.1：四次元に置いたクラインの壺と、比較のためのトーラス。面の向きを実際に揃えようとして、揃わない辺を数える。

曲面	V	E	F	欠損の総和	揃わない辺
トーラス	384	1152	768	0	0
クラインの壺	384	1152	768	0	92

観察 5.2

二つは V も E も F もオイラー標数も欠損の総和も同じである。違うのは向きが揃うかどうかだけ——したがって総和は向き付け不能を検出しない。

6. ただし「92 本」は、探索の順に依る

検算 6.1：同じクラインの壺で、面を訪ねる順を八通りに変える。

曲面	揃わない辺の数（八通り）
クラインの壺	96, 92, 88, 96, 96, 97, 94, 94
トーラス	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

観察 6.2

数そのものは曲面の性質ではない——訪ねる順で 88 から 97 まで動く。動かないのはゼロにならないことだけである——どの順で試しても成功しない。本稿が示したのは八通りで失敗することであり、どんな順でも失敗することは引用する定理である。

7. 芯：射影平面では総和は 2π になり、しかも数え上げで決まる

検算 7.1：正二十面体の向かい合う点を同一視し、すべての項が二次であるヴェロネーゼの写像で五次元に置く。

測ったもの	値
V 、 E 、 F	6、15、10
オイラー標数	1
欠損の総和	6.283185307180 ($2\pi = 6.283185307180$)
揃わない辺	4

観察 7.2

閉じた一方向の曲面でありながら、総曲率はゼロではなく 2π である。 $2\pi\chi$ という規則はそのまま成り立つ——向き付けはどこにも要らなかった。

検算 7.3：三角形の内角の和は π であるから、欠損の総和は $2\pi V - \pi F$ に等しい。 $3F = 2E$ より、これは $2\pi(V - E + F)$ である。

曲面	V	F	$2\pi V - \pi F$	実測
トーラス	384	768	0.000000000000	0.000000000000
クラインの壺	384	768	0.000000000000	0.000000000000
射影平面	6	10	6.283185307180	6.283185307180

観察 7.4

総和は数え上げだけで決まっている——頂点をどこに置いても動かせない。だから向き付けが総和に入り込む隙が、そもそも無いのである。224 で「総額だけは請求され続ける」と書いた——その総額は座標を選ぶ前に決まっていた。

8. 分離子と柵

観察 8.1 (分離子)

「面積」を分けているのは、密度として読むか、形式として読むかである。

言い方	メビウスの帯で	何が要るか
面積 (測度)	ある	大きさだけ
総曲率	ある	大きさだけ
面積形式 (二次形式)	無い	向き
有向面積・流束	無い	向き
連続な法線	無い	向き

観察 8.2 (柵)

「この面の面積は」という言い方を囲っている柵は、符号を要求していないことである。柵の外——たとえば「この面を通る流束は」——では、この文は偽ですらなく、空である——223 の「この列はランダムである」、225 の「体積は保存する」と同じ形である。

観察 8.3

生き残る量は、失われたものが見えない。トーラスとクラインの壺は V も E も F も χ も総曲率も同じである——数のほうを見ているかぎり、一方向であることに気づけない。気づくには面の向きを実際に揃えようとしてみるしかない。

観察 8.4

名前も別根を持つ。論文167の「メビウス」はメビウス変換であり、本稿の「メビウス」は帯である——同じ人の名が、別の対象に付いている。

9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 法線は裏返って戻る（検算2.1）：三通りの刻みで -1.000000000000 。
2. それでも面積はある（検算3.1）： 25.4130750300 に収束。
3. 二周すれば戻る（検算4.1）： $+1$ 、面積はちょうど二倍。
4. クラインの壺は向きが揃わない（検算5.1）：トーラスと V, E, F, χ 、総和がすべて同じ。
5. 揃わない辺の数は順に依る（検算6.1）： 88 から 97 、ゼロにはならない。
6. 射影平面の総和は 2π （検算7.1）：一方向なのにゼロでない。
7. 総和は $2\pi V - \pi F$ （検算7.3）：数え上げだけで決まる。

結び：紙を細長く切り、ひとひねりして輪にする。その帯には表も裏も無い——法線を持って一周すると、正反対を向いて戻ってくる。それでも、面積はある。塗るのに要る絵の具の量はきちんと決まっている—— 25.4130750300 である。壊れたのは面積ではなく、面積に符号を付ける仕組みのほうであった。面積は大きさだけを要求し、流束や有向面積は向きを要求する——だから前者は残り、後者は消える。そして曲率も残る。クラインの壺の総曲率は 0 、射影平面のそれは 2π であり、どちらも $2\pi\chi$ ちょうどである——しかもその総和は頂点の数と面の数だけで決まっており、どこに置くかを定める前から動かない。論文67は「閉じた向き付け可能な曲面に対し」と書いて始まった——本稿が測ったのは、その形容詞が、この総和には要らなかったということである。仮定は定理を守るためではなく、証明の道具を守るために置かれていることがある——道具を取り替えれば、仮定のほうが落ちる。

参考文献

1. Listing, J. B. (1861). Der Census räumlicher Complexe. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 10.
2. Möbius, A. F. (1865). Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. *Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, 17.
3. Klein, F. (1882). *Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*. Leipzig: Teubner.

4. Veronese, G. (1884). La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni. *Atti della Reale Accademia dei Lincei*, 19.
5. Banchoff, T. F. (1970). Critical points and curvature for embedded polyhedra. *Journal of Differential Geometry*, 4.
6. Spivak, M. (1979). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 1*. Second edition. Berkeley: Publish or Perish.
7. do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
8. 山岸勇輝 (2025). 4π パッチのオイラー標数的起源 [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
9. 山岸勇輝 (2026). 一意化が与えるのは「一つの形」ではなく、「一つの模型と、一つの径数」である [論文167]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22093172
10. 山岸勇輝 (2026). どんな地図も、必ず何かを歪める [論文212]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22112104
11. 山岸勇輝 (2026). 検定を全部通り、それでも点は十五枚の平面に乗っている [論文223]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120728
12. 山岸勇輝 (2026). どこを触っても平らで、それでも合計は 4π である [論文224]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120836
13. 山岸勇輝 (2026). 一つの球から、同じ大きさの球が二つできる [論文225]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120991

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)