

「÷」は五つあり、割れない理由がそれぞれ違う

— 数としては必ず割り切れるのに、ものとしては割れないことがある：分けているのは記号ではなく、掛け算を戻すのを何が邪魔しているかである — [論文229]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

割り算は、掛け算を戻す操作である。だが戻すのを邪魔するものは一種類ではない。本稿は五つの妨げを点呼し、それぞれで何が起きるかを数で示す。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、同じ $12 \div 3 = 4$ が三つの別の 4 である。 $12\text{m} \div 3$ は長さ、 $12\text{m} \div 3\text{m}$ はただの個数、 $12\text{m} \div 3\text{s}$ は速さ——分けているのは単位である（第2節）。第二に、整数ではほとんど割れない。200000 組の乱数で、商が整数に戻ったのは 1404 回、すなわち **0.7020%** であった（第3節）。第三に、割る側に逆元が無いことがある。 $\mathbb{Z}/12$ で $6x = 1$ の解は一つも無く、 $6x = 0$ の解は 6 個ある——存在しないだけでなく、一意でもない（第4節）。第四に、掛け算が交換しないと、商は二つになる。19977 組の乱数行列で、左商と右商が一致したのは 0 件であった（第5節）。第五に、これが本稿の芯である。 S_3 ではどの部分群でも指数は整数なのに、商が群になるのは正規なときだけである——数はいつでも割れ、ものは割れない（第6節）。

本稿の射程（scope note）：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ラグランジュの定理、正規部分群と商群、リーマン球、IEEE 754、ホイール代数、非可換の左右の商、等分除と包含除の区別は、いずれも標準的である。網羅を主張しない——扱うのは五つの妨げであり、これで尽きているとは言わない。ゼロ除算の「正しい」定義を選ばない——どの流儀が優れているかは論じない。代数の教科書を書かない——局所化も商環の一般論も扱わない。算数教育の是非を論じない——等分除・包含除は既に名前のある区別として引くだけである。既刊との関係：論文16 は等号に六つの別根、論文227 は不等号に二種、論文228 は「+」に八つを数えた——本稿はその四本目である。論文228 は「交換しないことだけが座標で直せない」と結んだ——本稿の第5節はその割り算側の現れであり、同じ障害が二度現れている。論文181 は「掛け算は二つ目を決めない」を示した——割り算はその掛け算を戻す操作なので、曖昧さをそのまま相続する。加えたのは三つの 4 を単位で分けたこと、整数で割り切れる割合を測ったこと、 $\mathbb{Z}/12$ で逆元の非存在と非一意性を同時に示したこと、左右の商の一致回数を 19977 組で数えたこと、 S_3 の全部分群で指数と商群の可否を並べたことである。

1. 記法と位置づけ

割り算とは、掛け算を戻す操作である。 $a \div b$ とは「 b に掛けて a になるもの」を求めることである。本稿が問うのは、その「戻す」を何が邪魔しているかである。

位置づけ：論文16（等号）・227（不等号）・228（「+」）に続く記号の分類の四本目である。228が「交換しないことだけが直せない」と結んだ障害が、ここで二度目に現れる。

2. 同じ 4 が、三つの別のものである

検算 2.1：

何を訊いているか	式	答	分子の単位は残るか
12 m を 3 人で分ける	$12\text{ m} \div 3$	4 m	残る
12 m に 3 m はいくつ	$12\text{ m} \div 3\text{ m}$	4	消える（ただの個数）
3 秒で 12 m	$12\text{ m} \div 3\text{ s}$	4 m/s	別の単位が生まれる

観察 2.2

数はどれも 4 であり、ものは三つとも違う。一つは長さ、一つは無次元の個数、一つは速さである——分けているのは計算ではなく、単位である。算数ではこれを等分除と包含除と呼び分けており、既に名前がある。

3. 答が、集合を出ていく

検算 3.1：1 から 999 の整数の組を 200000 回作り、商が整数に戻る回数を数える。

測ったもの	値
試した組	200000
商が整数だった回数	1404
割合	0.7020%

観察 3.2

整数の世界では、割り算はほとんどの場合そもそも定義されていない。治し方は演算をいじることではなく、集合を広げることである—— $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ へ移る、というのはそういう操作であった。

4. 割る側に、逆元が無い

検算 4.1 : $1 \div 0$ は、どこに立つかで答が変わる。

どこに立つか	$1 \div 0$ は何か
実数	定義されない (そのような数が無い)
リーマン球	無限遠という一点
IEEE 754	符号付きの無限大、そして $0/0$ は数でない
ホイール代数	定義された元 (ただし法則は弱くなる)
極限	たどる道に依る

実測 : $1/0 = \infty$ 、 $-1/0 = -\infty$ 、 $0/0 = \text{NaN}$ 。また x/x^2 は $x = 10^{-6}$ で $+10^6$ 、 $x = -10^{-6}$ で -10^6 である。

検算 4.2 : $\mathbb{Z}/12$ で 6 を割る。

問い	解
$6x = 1 \pmod{12}$	一つも無い
$6x = 0 \pmod{12}$	0, 2, 4, 6, 8, 10 (6 個)

逆元を持つ数の割合は、法 7 で 1.0000、法 12 で 0.3636、法 30 で 0.2759 である。

観察 4.3

逆元は存在しないだけでなく、一意でもない。 $6x = 0$ の解が 6 個あるということは、「0 を 6 で割る」に答が 6 個あるということである——割り算が壊れる第三の型である。

5. 掛け算が交換しないと、商は二つになる

検算 5.1： A を第一行 $(1, 2)$ 、第二行 $(3, 4)$ の行列、 B を第一行 $(0, 1)$ 、第二行 $(1, 1)$ の行列とする。

どちらの商か	値
$B^{-1}A$	第一行 $(2, 2)$ 、第二行 $(1, 2)$
AB^{-1}	第一行 $(1, 1)$ 、第二行 $(1, 3)$
最大の差	1.000000

19977 組の乱数行列で、左商と右商が一致したのは 0 件であった。

観察 5.2

「 A を B で割る」という単一の対象は無い。左から割ったものと右から割ったものがあり、別のものである——論文228 で「交換しないことだけが座標で直せない」と結んだ障害が、ここで二度目に現れている。

6. 芯：数はいつでも割れ、ものは割れない

検算 6.1：6 個の元をもつ群 S_3 の、すべての部分群について。

部分群 H	$ H $	指数 $ S_3 / H $	正規か	S_3/H は群か
単位元だけ	1	6	はい	はい
A_3 (回転)	3	2	はい	はい
$\{e, (01)\}$	2	3	いいえ	いいえ
$\{e, (02)\}$	2	3	いいえ	いいえ
S_3 自身	6	1	はい	はい

観察 6.2

指数 $|G|/|H|$ はどの部分群でも整数である（ラグランジュ）。ところが商が群になるのは、 H が正規なときだけである——指数 3 の二つでは、数は割れているのに、剰余類が掛け算を持たない。

観察 6.3

ここでは、そもそも何も逆にしていない。「 S_3 を A_3 で割る」は、掛け算を戻しているのではなく、ものを潰しているのである——同じ「割る」で、答が数になるか、ものになるかが違う。

7. 点呼：五つの妨げ

検算 7.1：

何が戻すのを邪魔しているか	例	何が得られるか
何も（体である）	有理数での $12 \div 3$	数
答が集合を出る	整数での $3 \div 2$	何も（広げるまで）
割る側に逆元が無い	$1 \div 0$ 、 $\mathbb{Z}/12$ の $1 \div 6$	最大五通りの答
掛け算が交換しない	行列の $A \div B$	左と右、二つの答
何も逆にしていない	$S_3 \div A_3$	数ではなく、もの

観察 7.2

五つの「 $\div$ 」は、記号が同じだけである。一つ目は普通の割り算、二つ目は定義されていない、三つ目は答が複数、四つ目は答が二つ、五つ目はそもそも別の操作である。

8. 分離子と柵

観察 8.1 (分離子)

「÷」を分けているのは、掛け算を戻すのを何が邪魔しているかである。記号ではない。

観察 8.2 (柵)

「これは割れる」という言い方を囲っている柵は、どの集合の中で、何を戻そうとしているかである。柵の外では、この文は偽ですらなく、空である——228の「これらは足せる」、227の「この量には上限がある」と同じ形である。

観察 8.3

228では、八つのうち七つが座標で救えた。本稿では救える型が一つも無い——割り算の妨げは変数の付け替えでは消えない。集合を広げるか、答が複数であることを認めるか、左右を区別するか、そもそも別の操作だと認めるかのいずれかである。

観察 8.4

記号の分類は、これで四本目になった——等号に六、不等号に二、「+」に八、「÷」に五。そしてまだ終わっていない。

9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 三つの 4 (検算2.1) : 長さ・個数・速さ。
2. 整数ではほとんど割れない (検算3.1) : 0.7020%。
3. ゼロ除算に五つの答 (検算4.1) : $1/0 = \infty$ 、 $0/0 = \text{NaN}$ 、道に依る。
4. 逆元は無く、しかも一意でない (検算4.2) : $6x = 0$ の解が 6 個。
5. 左商と右商 (検算5.1) : 19977 組で一致 0 件。
6. 数は割れ、ものは割れない (検算6.1) : 指数 3 で商群が無い。

7. 五つの妨げ（検算7.1）。

結び： $12 \div 3 = 4$ 。この式は、少なくとも三つの違うことを言っている——4メートルか、ただの4か、毎秒4メートルか。そして整数の中では、千組のうち七組しか割り切れない。0で割ろうとすれば答は五通りに分かれ、 $\mathbb{Z}/12$ で6で割ろうとすれば一つも無いが、六つある。行列なら左と右で別の答が出て、乱数を二万組近く試しても一度も一致しなかった。そして最後の一つは、割り算ですらない。 S_3 をその部分群で割るとき、数はいくつの部分群でもきれいに割れる——ラグランジュがそれを保証している。それなのに、剰余類が掛け算を持っていないことがある。指数はちゃんと3なのに、商という「もの」は存在しない。「割る」という一つの言葉が、数を求めることと、ものを潰すことの両方を指していた——だから割れるかどうかを訊く前に、何を戻そうとしているのかを訊かねばならない。

参考文献

1. Lagrange, J.-L. (1771). *Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.*
2. Riemann, B. (1851). *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.* Göttingen.
3. Ore, O. (1931). Linear equations in non-commutative fields. *Annals of Mathematics*, 32(3), 463–477.
4. Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3–17.
5. Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In: Grouws, D. A. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan.
6. Carlström, J. (2004). Wheels: on division by zero. *Mathematical Structures in Computer Science*, 14(1), 143–184.
7. IEEE (2019). *IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic.* IEEE Std 754-2019.
8. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
9. 山岸勇輝 (2026). 掛け算は「二つ目」を決めない [論文181]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22104155
10. 山岸勇輝 (2026). 四つの平均は一つの族であり、等号の柵は一つしかない [論文194]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106809
11. 山岸勇輝 (2026). 太陽は、緑にも橙にも赤外にも輝いている [論文222]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120199
12. 山岸勇輝 (2026). 同じ「 $\leq$ 」が、触れる壁と触れない壁を指している [論文227]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22123129
13. 山岸勇輝 (2026). 「+」は八つあり、そのうち七つは座標を変えれば本当の足し算になる [論文228]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22126254

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)