

曲率を一定にしても、密度は決まらない

— 山辺の定理が、光の残した一成分にできること・できないこと — [論文23]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文111 は光が計量の十成分のうち九つしか決めないことを書き、論文150 はその残の一つが密度であると突き止めた。では、幾何の側からその一つを決められるか。山辺の定理は「共形類の中にスカラー曲率が定数の計量が存在する」と言う。本稿はその定理に、決められることと決められないことを書き分けさせる。新しい数学定理は主張しない。第一に、共形ラプシアンは共形共変である。平坦計量を $u^{4/(n-2)}$ 倍したときのスカラー曲率が $-\frac{4(n-1)}{n-2}u^{-(n+2)/(n-2)}\Delta u$ に一致することを、記号計算で恒等的にゼロまで確かめた ($n=3, \dots, 7$ でも個別に確認) (第2節)。第二に、指数は臨界指数であり、 $n=2$ は問題の外にある。非線形項の指数 $\frac{n+2}{n-2}$ はソボレフ埋め込みが緊密性を失うちょうどその位置にある。 $n=2$ では分母が消え、これは別の問題 (ガウス=ボンネ) になる (第3節)。第三に、球面の山辺不変量の中に、体系の二つの数が座っている。 $\text{Vol}(S^n)$ は $n=2$ で 4π 、 $n=3$ で $2\pi^2$ である——後者は論文46 が「 $16\pi^2$ のうち唯一の幾何」と同定した Ω_3 そのものである (第4節)。第四に、これが本稿の芯である。定曲率を課しても、密度は決まらない。球面上の解は族をなす。 $u_\lambda = (\lambda/(\lambda^2 + r^2))^{(n-2)/2}$ から作る計量のスカラー曲率は、 $n=3, 4, 5, 6$ でそれぞれ **24, 48, 80, 120** という定数になり、 r にも λ にも依らない (本稿で計算)。 λ を動かせば計量は動くのに、曲率は動かない (第5節)。第五に、柵は山辺不変量の符号である。負またはゼロなら解は定数倍を除いて一意、正なら一意とは限らない (球面が実例)。分離子は「球面かどうか」ではなく、不変量の符号である (第6節)。そして山辺は一人で二つの定理を持つ——論文90 のグリーンソン=ヤマベと、本稿の山辺問題である (第7節)。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。共形ラプシアン共変性、山辺問題 (山辺1960、トゥルーディンガー1968、オーバン1976、シェーン1984)、オーバン=タレンティの解の族、一意性が不変量の符号で決まることはいずれも標準的である。本稿が加えるのは、論文150 が「外から持ち込むしかない」と書いた一成分に、幾何の側から何ができるかを書いたこと、「決まらない」ことを λ が消える計算で示したこと、柵が不変量の符号であると書いたこと、「ヤマベ」が一人二定理であると点呼したことだけである。

1. 記法と位置づけ

n 次元多様体 (M, g) のスカラー曲率を R_g 、共形ラプラシアンを $L_g = -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g + R_g$ と書く ($n \geq 3$)。共形変換を $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ 、 $u > 0$ と書く。

位置づけ：論文111 が「光は九つまで」と書き、論文150 がその残る一つを密度と同定した。本稿はその一つに、曲率の側から手を伸ばす——そして届かないところに線を引く。

2. 共形ラプラシアンは共形共変である

検算 2.1：平坦計量を $u^{4/(n-2)}$ 倍したときのスカラー曲率を、共形変換の標準公式から書き下すと

$R_{\tilde{g}}$ (公式から)	$-\frac{4(n-1)}{n-2} u^{-1-4/(n-2)} u''$
$-\frac{4(n-1)}{n-2} u^{-(n+2)/(n-2)} u''$	同じ
差	恒等的に 0

さらに $n = 3, 4, 5, 6, 7$ について個別に差を計算し、すべて 0 を得た。(証明終)

観察 2.2

したがって $R_{\tilde{g}} = u^{-(n+2)/(n-2)} L_g u$ である。 $-1 - \frac{4}{n-2} = -\frac{n+2}{n-2}$ という指数の一致が、共変性の中身である。

3. 指数は臨界指数であり、 $n = 2$ は外にある

検算 3.1

n	$\frac{n+2}{n-2}$	$2^* = \frac{2n}{n-2}$	備考
2	—	—	分母が消える：別の問題（ガウス＝ボンネ）
3	5	6	臨界
4	3	4	臨界
5	7/3	10/3	臨界
6	2	3	臨界
8	5/3	8/3	臨界

（証明終）

観察 3.2

非線形項の指数は、ソボレフ埋め込みが緊密性を失うちょうどその位置にある。難しさは技術的な偶然ではなく、指数がそこにあることの帰結である——そして球面が特別に振る舞う理由も、そこにある。

4. 球面の山辺不変量に、体系の二つの数が座っている

検算 4.1： $\text{Vol}(S^n) = 2\pi^{(n+1)/2}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$ 、 $Y(S^n) = n(n-1)\text{Vol}(S^n)^{2/n}$ とすると

n	$\text{Vol}(S^n)$	数値	$Y(S^n)$
2	4π	12.566371	25.132741
3	$2\pi^2$	19.739209	43.823233
4	$8\pi^2/3$	26.318945	61.562392
5	π^3	31.006277	78.996863
6	$16\pi^3/15$	33.073362	96.297283
7	$\pi^4/3$	32.469697	113.527275

（証明終）

観察 4.2

$n = 3$ の体積は $2\pi^2$ である——論文46 が「 $16\pi^2$ のうち、幾何なのは $\Omega_3 = 2\pi^2$ だけである」と同定した、まさにその数である。体系が場の量子論の測度の中に見つけた幾何が、ここでは山辺不変量の中に座っている。

観察 4.3 （住所を書く）

ただし同じ数が現れることは、同じ根を持つことではない（論文100・142）。片方は四次元運動量空間の測度、片方は三次元球面の体積である。共通しているのは「単位三次元球面の体積」という一点であり、それは偶然ではなく同じ幾何量だが、使われ方は別である。

5. 定曲率を課しても、密度は決まらない

検算 5.1：平坦空間上に $u_\lambda(r) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2}\right)^{(n-2)/2}$ を取り、計量を $u_\lambda^{4/(n-2)}\delta$ とすると

n	R	r に依るか	λ に依るか
3	24	いいえ	いいえ
4	48	いいえ	いいえ
5	80	いいえ	いいえ
6	120	いいえ	いいえ

（証明終） いずれも半径 $\frac{1}{2}$ の球面に対応する定数である。

観察 5.2 （これが本稿の芯である）

族のどの一つを取っても、スカラー曲率は同じ定数である。 λ は答から消えている。 λ を動かせば計量は動く——体積も距離も変わる——のに、曲率は動かない。

観察 5.3

したがって「スカラー曲率を定数にせよ」という要求は、密度を一つに選ばない。光が残した一成分（論文150）に、曲率は制約を与えるが、値を与えない。

検算 5.4（族の大きさ）：球面の共形群を等長変換で割った自由度は

n	$\dim O(n+1,1)$	$\dim O(n+1)$	自由度
3	10	6	4
4	15	10	5
5	21	15	6
6	28	21	7

すなわち n 次元球面では $n+1$ 個の径数が残る。（証明終）

6. 柵は、山辺不変量の符号である

観察 6.1

$Y(M,[g])$ の符号	何が言えるか	一意性
負	解は定数倍を除いて一意	決まる
零	解は定数倍を除いて一意	決まる
正	一意とは限らない（球面が実例）	破れうる

観察 6.2

分離子は「球面かどうか」ではない。山辺不変量の符号である。負またはゼロなら、曲率一定という要求は密度を本当に決めてしまう。正のときにだけ、決めきらない。

観察 6.3（論文150 への差し戻し）

論文150 は「体積の基準は外から持ち込むしかない」と書いた。本稿はそれを半分だけ訂正する——不変量が正でない共形類では、幾何が持ち込んでくれる。正のときには、やはり外から持ち込むしかない。

7. 一人が二つの定理を持つ

観察 7.1

定理	内容	体系での住所
グリーンソン＝ヤマベ	ヒルベルト第5問題（位相群がリー群になる）	論文90
山辺問題	共形類の中に定曲率計量が存在する	本稿

観察 7.2

同じ人の、互いに無関係な二つの定理である——論文125 がホップについて見つけたのと同じ形（一人二定理）。「ヤマベの定理」と書くだけでは住所にならない（論文17）。

観察 7.3（証明が物理を要した）

山辺問題の残った場合を閉じたのはシェーン（1984）であり、そこで使われたのは一般相対論の正質量定理であった。幾何の問題が、物理由来の定理に依存して解けた——王道どうしが交差した実例である（論文100）。

8. 結論

- 共形ラプラシアンは共形共変である（検算2.1）。差は恒等的にゼロ。
- 指数は臨界指数であり、 $n = 2$ は外にある（検算3.1）。
- 球面の体積に 4π と $2\pi^2$ が座っている（検算4.1）。後者は論文46 の Ω_3 そのもの。

4. 定曲率を課しても密度は決まらない（検算5.1）。 λ が答から消える。
5. 柵は山辺不変量の符号である（観察6.1）。正でなければ決まる。
6. ヤマベは一人で二つの定理を持つ（観察7.1）。そして証明は正質量定理を要した（観察7.3）。

結び：光は共形類までしか教えず、残る一つを置いていった。曲率にそれを拾わせようとする、拾える場合と拾えない場合がある——分けているのは、多様体の名前ではなく、一つの数の符号である。そして拾えないときに残るのは、 λ という名の、答から消えてしまう怪数であった。

参考文献

1. Yamabe, H. (1960). *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*. Osaka Mathematical Journal, 12.
2. Trudinger, N. S. (1968). *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 22.
3. Aubin, T. (1976). *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 55.
4. Schoen, R. (1984). *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*. Journal of Differential Geometry, 20.
5. Schoen, R. & Yau, S.-T. (1979). *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*. Communications in Mathematical Physics, 65.
6. Lee, J. M. & Parker, T. H. (1987). *The Yamabe problem*. Bulletin of the American Mathematical Society, 17.
7. Talenti, G. (1976). *Best constant in Sobolev inequality*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 110.
8. 山岸勇輝 (2026). 8π は単位の産物である [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
9. 山岸勇輝 (2026). $16\pi^2$ のうち、幾何なのは $\Omega_3 = 2\pi^2$ だけである [論文46] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602422
10. 山岸勇輝 (2026). 弱い仮定がリー群を強制する [論文90]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758361
11. 山岸勇輝 (2026). 王道の交差 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
12. 山岸勇輝 (2026). 光は共形構造までしか決めない [論文111]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21961685
13. 山岸勇輝 (2026). ホップは三人いる [論文125]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079384
14. 山岸勇輝 (2026). 光が測れないのは、密度である [論文150]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083989
15. 山岸勇輝 (2026). 点がひとつも無い空間がある [論文155]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084848

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)