

「×」は、倍にするたびに一つ法則を失う

— 実数・複素数・四元数・八元数・十六元数：順序、可換、結合、そして割り算そのものが、一段ごとに落ちていく — [論文231]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

掛け算に何を期待してよいかは、どこで掛けているかで変わる。本稿はどの法則が生き残るかを測り、次元を倍にするたびに一つずつ落ちていくことを示す。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、「同じ数を何回も足す」は定義ではない。 3×2.5 にその読み方は無い——それは一つの場合にだけ通じる絵である（第2節）。第二に、外積は結合しない。 $(a \times b) \times c$ と $a \times (b \times c)$ のずれは最大 **10.7208** であった——ただしヤコビ和は 3.553×10^{-15} であり、別の法則を守っている（第4節）。第三に、これが本稿の芯である。次元 **1, 2, 4, 8** と倍にするたびに、ちょうど一つ法則が落ちる——順序、可換（ずれ **19.1**）、結合（ずれ **72.4**）（第5節）。第四に、十六で割り算そのものが壊れる。 $(e_1 + e_{10})(e_4 - e_{15}) = 0$ であり、両方の大きさは $\sqrt{2}$ である——この形の零因子は**336**組あり、八元数には一組も無い（第6節）。第五に、確率の積は掛け算の性質ではない。同じコインを二度見れば $P(A)P(B) = 0.25$ に対し $P(A \cap B) = 0.5$ である——積の規則は世界についての仮説である（第7節）。

本稿の射程（scope note）：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ケイリー＝ディクソン構成、フロベニウスの定理、フルヴィッツの定理、外積の非結合性とヤコビ恒等式、十六元数の零因子は、いずれも標準的である。網羅を主張しない。フルヴィッツの定理を証明しない——「四つで止まる」ことは引用する定理であり、本稿は各段で何が落ちるかを測るだけである。代数の教科書を書かない——分解型の代数も、標数の違う体も扱わない。零因子の分類をしない——挙げるのは $e_i \pm e_j$ の形のもののだけである。既刊との関係：論文**16**（等号に六）・**227**（不等号に二）・**228**（「+」に八）・**229**（「÷」に五）・**230**（「-」に七）に続く記号の分類の六本目であり、四則が揃う。論文**181**は「掛け算は二つ目を決めない」を示した——あちらの分離子は余積 Δ であり、本稿の分離子（どの法則を諦めたか）とは別である。重ならない。論文**220**は「独立は四つある」を示した——第7節はその掛け算側の現れである。加えたのは行列と外積で法則のずれを実測したこと、外積が結合しないのにヤコビを守ることを 10^{-15} で確かめたこと、ケイリー＝ディクソンの各段で可換性と結合性のずれを測ったこと、十六元数の零因子を推測ではなく総当たりで見つけたこと、八元数に同じ形が無いことを確かめたことである。

1. 記法と位置づけ

「 $\times$ 」に我々が期待するのは、およそ四つである。交換法則・結合法則・答が同じ型であること・足し算に分配すること。本稿が測るのは、それぞれの掛け算で、どれが生き残るかである。

位置づけ：記号の分類の六本目であり、これで四則が揃う。論文181 の分離子は余積であって、本稿とは別の切り口である。

2. 「同じ数を何回も足す」は、定義ではない

観察 2.1

式	繰り返し足すと読めるか	積の値
3×4	$3 + 3 + 3 + 3 = 12$	12
3×2.5	読み方が無い	7.5
$3 \times (-2)$	読み方が無い	-6
3×0.5	読み方が無い	1.5

観察 2.2

「 a を b 回足す」には、 b が個数であることが要る。これは掛け算の定義ではなく、一つの場合にだけ通じる絵である——論文229 で割り算にも二つの絵があったのと同じ事情である。

3. 積は、始めた集合を出ていくことがある

観察 3.1

積	入れるもの	出てくるもの
$2\text{ m} \times 3\text{ m}$	二つの長さ	6 m^2 ——面積であって長さではない
内積	二つのベクトル	数
外積	二つのベクトル	ベクトル（三次元でだけ）
外微分形式の積	二つの 1 -形式	2 -形式
テンソル積	次元 10 と 10	次元 100

観察 3.2

五つのうち四つで、答は同じ型ではない。「掛ける」と言うとき、我々は何が出てくるかを言っていない。

4. どの法則が残るか：行列と外積

検算 4.1： 3×3 の乱数行列と三次元の乱数ベクトルで、法則のずれを測る。

積	交換法則のずれ	結合法則のずれ
行列	10.7622	1.776×10^{-15}
外積	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ （反対称）	10.7208

外積についてヤコビ和 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ を測ると 3.553×10^{-15} であった。

観察 4.2

外積は結合しない。だが無法則なのではない——結合法則の代わりにヤコビ恒等式を守っている。「法則が壊れた」のではなく、別の法則に取り替わったのである。

5. 芯：倍にするたびに、一つ落ちる

検算 5.1：ケイリー＝ディクソン構成で次元を **1, 2, 4, 8, 16** と倍にし、各段で乱数を **4000** 組ずつ測る。

代数	次元	交換法則	結合法則
実数	1	成り立つ	成り立つ
複素数	2	成り立つ	成り立つ
四元数	4	破れる（ずれ 19.1）	成り立つ
八元数	8	破れる（ずれ 24.3）	破れる（ずれ 72.4）
十六元数	16	破れる（ずれ 36.7）	破れる（ずれ 156）

構成の確認：四元数で $ij = k, ji = -k, i^2 = -1$ 。八元数で $(e_1e_2)e_4$ と $e_1(e_2e_4)$ は符号が逆であった。

観察 5.2

一段ごとに、ちょうど一つ落ちる。

代数	次元	その倍加が支払ったもの
実数	1	—
複素数	2	順序（大小を比べられなくなる）
四元数	4	可換性
八元数	8	結合性
十六元数	16	零因子が無いこと（第6節）

そして 1, 2, 4, 8 で止まる。これはフルヴィッツの定理であり、本稿は証明せず引用する。

6. 十六で、割り算そのものが壊れる

検算 6.1（推測から総当たりへ）：初めに文献から思い出した組を当てたが、 $|xy| = 2.828$ で零にならなかった。基底の並べ方が違えば当たらない。そこで $e_i \pm e_j$ の形の組を総当たりした。

測ったもの	値
零になる組の数	336
最初の一つ	$(e_1 + e_{10})(e_4 - e_{15})$
$ x $ 、 $ y $	1.4142135624 、 1.4142135624
$ xy $	0
$ yx $	0
八元数で同じ形の零因子	0 組

観察 6.2

どちらの因子も零ではないのに、積が零である。 x で割るという操作が、意味を持てなくなる——論文229で数えた「割れない理由」の三つ目（逆元が無い）が、ここでは掛け算の側から生じている。そして破れは十六でだけ起き、八では一組も無い。

7. 確率の積は、掛け算の性質ではない

検算 7.1：

場合	$P(A)P(B)$	$P(A \cap B)$	一致するか
独立な二枚のコイン	0.25	0.25	はい
同じコインを二度見る	0.25	0.5	いいえ
A とその余事象	0.25	0	いいえ

観察 7.2

積の規則は掛け算の性質ではない。それは世界についての仮説であり、たいていの場合は偽である——論文220が「独立は四つある」と数えたことの、掛け算側の現れである。

8. 分離子と柵

観察 8.1（分離子）

「 $\times$ 」を分けているのは、どの法則を諦めたかである。

諦めたもの	例
何も	数の積
順序	複素数
可換性	四元数・行列
結合性	八元数・外積（ヤコビに取り替わる）
答が同じ型であること	面積・内積・外微分形式・テンソル積
零因子が無いこと	十六元数
分配が無条件であること	確率の積（独立を要する）

観察 8.2（柵）

「これらは掛けられる」という言い方を囲っている柵は、どの法則を当てにしているかを決めていることである。柵の外では、この文は偽ですらなく、空である——230・229・228 と同じ形である。

観察 8.3

四則が揃った。分離子はそれぞれ違う——「 $+$ 」は戻す座標があるか（228）、「 $-$ 」は何が戻ってくるはずか（230）、「 $\div$ 」は何が戻すのを邪魔しているか（229）、そして「 $\times$ 」はどの法則を諦めたかである。四つとも、記号を見ても分からない。

9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 繰り返し足すのは定義ではない（観察2.1）： 3×2.5 に読み方が無い。
2. 五つのうち四つで型が変わる（観察3.1）。
3. 外積は結合せず、ヤコビを守る（検算4.1）： 10.7208 と 3.553×10^{-15} 。
4. 一段ごとに一つ落ちる（検算5.1）：順序・可換・結合。
5. 零因子は推測では当たらなかった（検算6.1）：総当たりで **336** 組。
6. 十六でだけ割り算が壊れる（検算6.1）：八元数では **0** 組。
7. 確率の積は仮説である（検算7.1）：**0.25** に対し **0.5**。

結び：掛け算は、たいてい「同じ数を何回も足すこと」として教えられる。 3×2.5 には、その読み方が無い。そして **2**メートル $\times$ **3**メートルは **6**ではなく、**6**平方メートルという別の種類のものである。行列では順序を変えると答が変わり、外積では括弧の位置を変えると答が変わる——ただし外積はヤコビ恒等式という別の法則を、 10^{-15} の精度で守っている。そして数の世界を倍にしていくと、一段ごとにちょうど一つ、法則が落ちる。複素数で順序を、四元数で可換性を、八元数で結合性を失い——十六元数では、どちらも零でない二つを掛けて零になる。 $(e_1 + e_{10})(e_4 - e_{15}) = 0$ 、両方の大きさは $\sqrt{2}$ 、そのような組が **336** ある。八元数には、一組も無い。つまり「掛ける」という一つの言葉のもとで、我々は何を当てにしているのかを、場所ごとに交渉している。だから掛けられるかどうかを訊く前に、どの法則を当てにしているのかを訊かねばならない——そして一つ多く手に入れるたびに、一つ手放している。

参考文献

-
1. Hamilton, W. R. (1844). On quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 3, 1–16.
 2. Cayley, A. (1845). On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions. *Philosophical Magazine*, 26, 208–211.
 3. Frobenius, G. (1878). Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84, 1–63.
 4. Hurwitz, A. (1898). Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 309–316.
 5. Bott, R., Milnor, J. (1958). On the parallelizability of the spheres. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64(3), 87–89.
 6. Baez, J. C. (2002). The octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(2), 145–205.
 7. Grassmann, H. (1844). *Die lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig: Wigand.
 8. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
 9. 山岸勇輝 (2026). 掛け算は「二つ目」を決めない [論文181]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22104155
 10. 山岸勇輝 (2026). 「独立」は四つあり、たがいに何も言わない [論文220]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119838
 11. 山岸勇輝 (2026). 「+」は八つあり、そのうち七つは座標を変えれば本当の足し算になる [論文228]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22126254

12. 山岸勇輝 (2026). 「÷」は五つあり、割れない理由がそれぞれ違う [論文229]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22126445
13. 山岸勇輝 (2026). 「-」は七つあり、そのうち一つは足し算を戻さない [論文230]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22126779

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)