

# 「微分できる」は六つあり、そのうち二つは極限を取らない

— 全方向に導関数があるのに全微分は無く、リーマン＝リウヴィルは定数を消さない：分離子は「何  
に対して微分と言っているか」である — [論文233]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

## 要旨

論文178は「どの意味で微分と言っているかの問題である」と書いて、そこで止めた。本稿はその点呼である。「微分できる」は少なくとも六つの別の主張であり、二つは差分商の極限をまったく取らない。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、全方向にあって、全体には無い。 $f(x, y) = x^3y/(x^6 + y^2)$  はあらゆる方向で微分係数0を持ちながら、曲線  $y = x^3$  の上では原点にいくら近づいても値が0.5のままである（第2節）。第二に、どこにも無い。ワイエルシュトラス関数の差分商は  $h$  を縮めるほど  $19.77 \rightarrow -172.32 \rightarrow -947.98 \rightarrow -7510.35 \rightarrow +11503.54$  と符号ごと暴れる（第3節）。第三に、ほとんど至る所にはある。カントール階段は乱数3000点すべてで傾きが  $10^{-6}$  未満、それでいてちょうど1だけ上がる（第4節）。第四に、極限を取らない微分がある。 $|x|$  の弱微分は  $\text{sgn}$  であり、試験関数との対で  $0.1777772705925436369$  が両辺一致した（差  $6.46 \times 10^{-27}$ ）（第5節）。第五に、これが本稿の芯である。カントール階段の超関数微分は関数ではなく測度である——台の長さが0.0077へ縮んでも積分は  $0.2373579604737711$  に居座る（第6節）。第六に、定数を消さない微分がある。 $1/2$  階のリーマン＝リウヴィル微分は定数1に対し  $x = 1$  で  $0.564189583548$  を返す——カブトは0を返し、差はちょうど初期値の分である（第7節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ワイエルシュトラス関数、カントール階段、ルベーグの微分定理、ラーデマッハの定理、ソボレフの弱微分、シュワルツの超関数、リーマン＝リウヴィルとカプトの分数階微分は、いずれも標準的である。どの定義が正しいかを決めない——六つは目的が違うのであって、優劣ではない。分数階微分の応用を論じない——粘弾性も異常拡散も扱わない。微分の歴史を書かない——誰がいつ何を定義したかは参考文献に置くだけである。数値微分の誤差論を作らない——第3節の暴れは丸め誤差ではなく関数の性質だが、その分離は本稿では示さない。既刊との関係：論文178は階段関数の超関数微分を扱い、「どの意味で微分と言っているかの問題である」と名指しして止めた——本稿はその戸から入る。論文177は「連続」の五別根を数え、カントール階段を絶対連続の反例として使った——本稿は同じ関数を微分の側から見るので、事実は重なるが問いが違う。論文197は「収束する」の四別根を数えた——本稿はその微分版である。論文16は等号に六つの別根を数えた——本稿の六つは演算子の側の別根である。加えたのは方向微分と全微分の乖離を数で見せたこと、弱微分を試験関数との対で検算したこと、カントール測度への収束を段ごとに追ったこと、そこで生じた  $2.59 \times 10^{-4}$  のずれの出所を突き止めたこと、二つの分数階微分の差が初期値そのものだと確かめたことである。

## 1. 記法と位置づけ

論文178は、階段関数に超関数微分を与えたあとでこう書いた——「どちらも、どの意味で微分と言っているかの問題である」。そこで文は終わっている。本稿はその問いの点呼である。

問うのはどの定義がどの対象に届くかであり、どれが本物の微分かではない。

位置づけ：論文177は連続の別根を数えた——本稿は微分の別根を数える。両者はカントール階段という同じ証人を使うが、訊いていることが違う——あちらは「絶対連続か」、こちらは「導関数は何か」である。

## 2. 方向にはあるのに、全体には無い

検算 2.1 :  $f(x, y) = x^3y/(x^6 + y^2)$ 、 $f(0, 0) = 0$  とおく。原点で各方向の微分係数を測る。

| 方向 $(a, b)$         | $f(ta, tb)/t$ ( $t = 10^{-6}$ ) |
|---------------------|---------------------------------|
| (0.70711, 0.70711)  | $5.0 \times 10^{-7}$            |
| (0.70711, -0.70711) | $-5.0 \times 10^{-7}$           |
| (0, 1)              | 0                               |
| (1, 0)              | 0                               |
| (0.89443, 0.44721)  | $1.6 \times 10^{-6}$            |
| (0.31623, 0.94868)  | $3.33 \times 10^{-8}$           |

どの方向でも  $t \rightarrow 0$  で 0 に行く。つまりガトー微分はあらゆる方向に存在し、すべて 0 である。(証明終)

検算 2.2：ところが直線ではなく曲線で近づく。

| $x$       | $f(x, x^3)$ |
|-----------|-------------|
| $10^{-1}$ | 0.5         |
| $10^{-3}$ | 0.5         |
| $10^{-5}$ | 0.5         |
| $10^{-8}$ | 0.5         |

原点にいくら近づいても 0.5 のままである。(証明終)

### 観察 2.3

$f$  は原点で連続ですらない。連続でないものが全微分できるはずはないから、フレシェ微分は存在しない——それでも方向微分は全部存在する。分離子はどの近づき方を許すかであり、直線だけを見る定義は、曲線の情報を落とす。

## 3. どこにも無い

検算 3.1： $W(x) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k} \cos(13^k \pi x)$  の差分商を  $x = 0.3$  で測る。

| $h$       | $(W(x+h) - W(x))/h$ |
|-----------|---------------------|
| $10^{-2}$ | 19.7683562423       |
| $10^{-3}$ | -172.320151069      |
| $10^{-4}$ | -947.978382329      |
| $10^{-5}$ | -7510.34927975      |
| $10^{-6}$ | 11503.5449173       |
| $10^{-7}$ | 12914.8221772       |

観察 3.2

大きさが増えるだけでなく、符号が入れ替わる。 $W$  は至る所連続で、至る所微分不可能である——ここでは六つのうち一つも適用できない、のではない。弱微分も超関数微分も存在する（ $W$  は連続だから局所可積分である）——存在しないのは差分商の極限だけである。

4. ほとんど至る所にはある

検算 4.1：カントール階段  $c$  を自己相似の定義  $c(x) = c(3x)/2$  ( $x \leq 1/3$ )、 $c(x) = 1/2$  ( $1/3 < x < 2/3$ )、 $c(x) = 1/2 + c(3x - 2)/2$  ( $x \geq 2/3$ ) で作り、乱数 3000 点で  $h = 10^{-15}$  の差分商を測る。

| 量                    | 値                   |
|----------------------|---------------------|
| $c(0)$               | 0                   |
| $c(1)$               | 1                   |
| 全上昇                  | 1.0                 |
| 傾きが $10^{-6}$ 未満だった点 | 3000/3000 (100.00%) |

観察 4.2

単調関数はほとんど至る所で微分可能である（ルベーク）——カントール階段はその極端な場合で、導関数はほとんど至る所 0。各点の導関数を積分すると 0 になり、上昇 1 と合わない——論文177 はこれを絶対連続でないこととして述べた。

観察 4.3

本稿が足すのは、そこから先である——「導関数が無い」のではなく、別の意味の導関数なら在る。それが第6節である。

5. 極限を取らない微分

定義 5.1

$g$  が  $f$  の弱微分であるとは、すべての試験関数  $\varphi$  に対し  $-\int f\varphi' = \int g\varphi$  が成り立つことをいう。差分商は現れない。

検算 5.2：  $f(x) = |x|$ 、 $\varphi$  を  $(-0.55, 1.05)$  に台を持つ滑らかな山とする（原点を含むが中心ではない）。

| 量                                       | 値                      |
|-----------------------------------------|------------------------|
| $-\int  x  \varphi' dx$                 | 0.177772705925436369   |
| $\int \operatorname{sgn}(x) \varphi dx$ | 0.177772705925436369   |
| 差                                       | $6.46 \times 10^{-27}$ |
| $\int 1 \cdot \varphi dx$ （誤った候補）       | 0.35519505293446355    |

観察 5.3

$\operatorname{sgn}$  が  $|x|$  の弱微分である。山を原点对称に置くと両辺とも 0 になり、何も判定できない——だから台をずらした。誤った候補が 0.355 を返すことが、この検算が実際に区別している証拠である。

観察 5.4

$|x|$  は  $x = 0$  で差分商の極限を持たないのに、弱微分は持つ。問いを点の値から積分の相手へ移したからである——論文178 が「値から作用へ」と書いたのと同じ移動である。

6. 芯：関数ではない導関数

検算 6.1：カントール階段の超関数微分を測る。定義により  $\langle c', \varphi \rangle = - \int c \varphi'$  である。右辺を数値で求め、段  $n$  のカントール測度での  $\int \varphi$  と比べる。

| 段 $n$ | 区間の数   | 台の総長                  | $\int \varphi d\mu_n$ |
|-------|--------|-----------------------|-----------------------|
| 1     | 2      | 0.666666666667        | 0.2369516407540564    |
| 2     | 4      | 0.444444444444        | 0.2381665572300388    |
| 4     | 16     | 0.197530864198        | 0.2373636538380312    |
| 8     | 256    | 0.0390184423106       | 0.2373579613338792    |
| 12    | 4096   | 0.00770734662926      | 0.2373579604737711    |
| 18    | 262144 | $2.58 \times 10^{-4}$ | 0.23735796047364      |

観察 6.2

台の長さは 0 へ行くのに、積分は0.2373579604737711 に居座る。質量は測度零の集合の上に載っている——したがって密度は存在せず、この導関数はどこでも関数ではない。第4節で「導関数は 0」と言えたのは、各点の値という意味に限ったときだけである。

検算 6.3（本稿で生じたずれ）：最初、左辺を  $[0, 1]$  の上だけで積分したところ 0.2370988 となり、第4桁で合わなかった。

| 計算                             | 値                       |
|--------------------------------|-------------------------|
| $[0, 1]$ だけで積分                 | 0.2370988               |
| 測度側                            | 0.23735796047364        |
| 差                              | $2.5916 \times 10^{-4}$ |
| $\varphi(1)$                   | $2.5916 \times 10^{-4}$ |
| 台の全体で積分 ( $c$ を $0$ と $1$ で延長) | 0.2373579608640875      |

### 観察 6.4

ずれはちょうど  $\varphi(1)$  であった。試験関数の台が  $1.05$  まで伸びているのに、 $c$  を  $[0, 1]$  で切っていた——つまり  $c$  を外側でどう延長するかを宣言していなかった。記号  $\langle c', \varphi \rangle$  はそのことを何も言っていない——これが超関数微分の罫である：台が定義域の中にあるか、延長を宣言してあるか。

## 7. 定数を消さない微分

検算 7.1： $1/2$  階の微分を、定数関数  $f \equiv 1$  に当てる。

| $x$  | リーマン＝リウヴィル     | カプト |
|------|----------------|-----|
| 0.01 | 5.64189583548  | 0   |
| 0.1  | 1.78412411615  | 0   |
| 0.5  | 0.797884560803 | 0   |
| 1    | 0.564189583548 | 0   |
| 2    | 0.398942280401 | 0   |

### 観察 7.2

リーマン＝リウヴィルでは定数の微分が  $0$  でない。しかも  $x \rightarrow 0$  で発散する。カプトでは  $0$  である——同じ「 $1/2$  階微分」という言い方が、正反対の答を返す。

検算 7.3 :  $f(x) = 1 + x$  で、 $x = 1$  における両者を求積で確かめる。

| 定義         | 数値求積           | 閉じた形                          |
|------------|----------------|-------------------------------|
| リーマン＝リウヴィル | 1.69256875064  | 1.69256875064                 |
| カプト        | 1.1283791671   | 1.1283791671                  |
| 差          | 0.564189583548 | $f(0) x^{-1/2} / \Gamma(1/2)$ |

観察 7.4

差は  $f(0) x^{-1/2} / \Gamma(1/2)$  にちょうど一致する。分離子は初期値をどう扱うかである——リーマン＝リウヴィルは積分してから微分し、カプトは微分してから積分する。順序を入れ替えただけで、定数が消えるか残るかが変わる。

8. 分離子と柵

観察 8.1 （点呼）

| 種類      | 何に対して微分と言うか   | 落ちる例       |
|---------|---------------|------------|
| フレッシュ   | 一次近似が全方向で一様   | 第2節の $f$   |
| ガトー（方向） | 各方向ごとの極限      | 曲線で近づくと壊れる |
| ほとんど至る所 | 測度零を捨ててよい     | カントール階段    |
| 弱微分     | 試験関数との対       | $ x $ は通る  |
| 超関数微分   | 同上、答が関数でなくてよい | $c'$ は測度   |
| 分数階     | 積分核との畳み込み     | 定数が消えない    |

### 観察 8.2 (分離子)

六つを分けているのは何に対して微分と言っているかである——点の値に対してか、方向に対してか、測度に対してか、試験関数に対してか、積分核に対してか。記号  $f'$  はそのどれとも書いていない。

### 観察 8.3 (柵)

柵は三つある。第一に、近づき方——直線だけか、曲線も許すか (第2節)。第二に、捨ててよい集合——測度零を捨てると基本定理が壊れる (第4節)。第三に、試験関数の台——定義域の外にはみ出すなら、延長を宣言しなければならない (第6節)。三つとも、記法には書かれていない。

### 観察 8.4

六つのうち二つ (弱微分と超関数微分) は、差分商をまったく取らない。それらは極限の定義ではなく、部分積分の要求である——だから「微分可能でない関数の微分」という言い方が矛盾なく成り立つ。論文16の言い方を借りれば、同じ記号が定義と要求の両方を務めている。

## 9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 全方向に微分係数 **0**、それでも不連続 (検算2.1・2.2) : 曲線上で **0.5**。
2. 差分商が暴れる (検算3.1) : **19.77** から **12914.82** まで、符号ごと。
3. 傾き **0** が **3000/3000**、上昇は **1** (検算4.1)。
4. 弱微分は極限を取らずに存在する (検算5.2) : 両辺 **0.1777772705925436369**。
5. 超関数微分は関数でない (検算6.1) : 台の長さ  $2.58 \times 10^{-4}$ 、積分は **0.2373579604737**。
6. 検算のずれ  $2.5916 \times 10^{-4}$  は  $\varphi(1)$  であった (検算6.3)。
7. 分数階は定数を消さない (検算7.1) : **0.564189583548** 対 **0**。

結び : 論文178 は、階段関数に微分を与えたあとで「どの意味で微分と言っているかの問題である」と書いて止まった。本稿はその先を数えた。「微分できる」は六つの別の主張であり、そのうち二つは差分商をまったく取らない。全方向に導関数があっても全微分は無く、至る所連続でもどこでも微分できず、ほとんど至る所で傾き **0** の関数がちょうど **1** だけ上がり、その導関数は関数ですらない。そして  $1/2$  階の微分は二つあって、定数について正反対の答を返す。六つを分けているのは何に対して微分と言っているかであり、記号  $f'$  はそのどれ

も書いていない。本稿でいちばん学んだのは、自分の検算が第4桁で合わなかったときである——ずれは丸め誤差ではなく、試験関数の台が定義域からはみ出していたことであった。 $\langle c', \varphi \rangle$  という記法は、台がどこまで伸びているかを言っていない。柵は、いつも記法の外にある。

## 参考文献

---

1. Weierstrass, K. (1895). Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments. In: *Mathematische Werke*, Bd. 2. Berlin: Mayer und Müller.
2. du Bois-Reymond, P. (1875). Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 79.
3. Lebesgue, H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars.
4. Rademacher, H. (1919). Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen. *Mathematische Annalen*, 79.
5. Gâteaux, R. (1919). Fonctions d'une infinité de variables indépendantes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 47.
6. Sobolev, S. L. (1938). Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. *Matematicheskii Sbornik*.
7. Schwartz, L. (1950--1951). *Théorie des distributions*. Paris: Hermann.
8. Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13.
9. Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press.
10. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
11. 山岸勇輝 (2026). 量子子の順序が、中身のすべてである [論文177]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098103
12. 山岸勇輝 (2026). デルタは関数ではなく、写像である [論文178]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098261
13. 山岸勇輝 (2026). 「収束する」は四つの別の主張であり、分けているのは何を捨てることを許すかである [論文197]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107590
14. 山岸勇輝 (2026). 証明を落とした本から学ぶと、等号の身分も一緒に落ちる [論文232]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22127528

---

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)