

「距離」は六つあり、そのうち一つは三角不等式を逆に満たす

— 擬距離・準距離・半距離・超距離・ローレンツ間隔：まっすぐ進む道が最長になり、すべての三角形が二等辺になる — [論文234]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

距離の公理は四つある——非負性、識別不能の同一性、対称性、三角不等式。本稿は、そのそれぞれを落としたときに何が残るかを数で確かめ、最後に落とさずに逆を向かせる。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、同一性が落ちる。 $d = |x_1 - x_2|$ を平面に入れると、相異なる三点が互いに距離0になる（第2節）。第二に、対称性が落ちる。一方通行の環では $d(0, 1) = 1$ に対し $d(1, 0) = 3$ 、 $d(0, 3) = 3$ に対し $d(3, 0) = 1$ である（第3節）。第三に、三角不等式が落ちる。 $d = (x - y)^2$ では $d(0, 2t)$ が $d(0, t) + d(t, 2t)$ のちょうど二倍になり、 $t = 5$ では 100 対 50 である（第4節）。第四に、三角不等式が強くなる。2進距離では乱数 19986 組すべてで $d(a, c) \leq \max$ が成り立ち、すべての三角形が二等辺であった（100.00%）（第5節）。第五に、これが本稿の芯である。ローレンツ間隔では三角不等式が逆を向く——寄り道するほど短くなり、 $10.0 \rightarrow 9.798 \rightarrow 9.165 \rightarrow 8.0 \rightarrow 6.0$ と落ちる。まっすぐが最長である（第6節）。第六に、公理を全部満たしても一つに決まらない。球面の弦距離と測地距離はどちらも本物の距離でありながら、比は 1.000004 から 1.570000 まで開く（第7節）。

本稿の射程 (scope note)：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——擬距離・準距離・半距離・超距離の定義、 p 進距離、オストロフスキーの定理、ミンコフスキー幾何における逆向きの三角不等式は、いずれも標準的である。双子のパラドックスを「解かない」——本稿が言うのはそれが計量の公理の話であるということだけで、加速も一般相対論も扱わない。位相を論じない——どの距離がどの位相を生むかは扱わない。一般化距離の分類学を作らない——六つは網羅ではなく点呼である。 p 進解析に立ち入らない——2進距離は超距離の証人としてしか使わない。どれが「本当の距離」かを決めない——第7節が示すのは、公理では一つに決まらないことである。既刊との関係：論文201は「完備」の四別根を数え、四つを束ねているのは計量が正定値であることと示した——本稿はその一つ手前、距離そのものを数える。論文217は距離だけを守れと言うと直線性まで守ってしまうことを示した——本稿は守るべき「距離」が何通りあるかを先に数える。論文121は計量の空間の上の計量を扱った——本稿は計量の公理そのものである。論文233は「微分できる」の六別根を数えた——本稿は同じ形の、距離版である。加えたのは四つの公理それぞれの落ち方を数で並べたこと、2進で二等辺率を測ったこと、ローレンツの逆向き三角不等式を寄り道の量として表にしたこと、弦と測地の比が $\pi/2$ まで開くことを示したことである。

1. 記法と位置づけ

定義 1.1

集合 X の上の関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が距離であるとは、次の四つを満たすことをいう。

1. 非負性： $d(x, y) \geq 0$ 。
2. 識別不能の同一性： $d(x, y) = 0$ ならば $x = y$ 。
3. 対称性： $d(x, y) = d(y, x)$ 。
4. 三角不等式： $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。

本稿は、二・三・四をそれぞれ落とし、最後に四を落とさずに向きだけ変える。

位置づけ：論文201は「完備」の別根を数え、正定値性が四つを束ねていると示した——本稿はその一つ手前である。訊くのはどれが本当の距離かではなく、どの公理を手放すと何が使えなくなるかである。

2. 擬距離：同一性が落ちる

検算 2.1：平面に $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|$ を入れる。

p	q	$d(p, q)$
(1, 0)	(1, 5)	0
(1, 0)	(1, -3)	0
(1, 5)	(1, -3)	0
(1, 0)	(4, 0)	3
(1, 5)	(4, 0)	3

観察 2.2

相異なる三点が、互いに距離 0 である。修復は商を取ることで、空間は x 軸に潰れる——潰したあとの点はもとの点ではない。 L^2 で「ほとんど至る所等しい関数を同一視する」のはこれと同じ操作であり、論文233 第4節の「測度零を捨てる」と同じ柵である。

3. 準距離：対称性が落ちる

検算 3.1：一方通行の環 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ （各辺の重み 1）に、割高な近道 $0 \rightarrow 3$ （重み 7）を足す。最短路を測る。

(a, b)	$d(a, b)$	$d(b, a)$	差
(0, 1)	1	3	2
(0, 2)	2	2	0
(0, 3)	3	1	2
(1, 3)	2	2	0

観察 3.2

0 から 3 へは 3 かかり、3 から 0 へは 1 で着く。三角不等式は両向きとも成り立っている——落ちたのは対称性だけである。修復は対称化（max か平均を取る）だが、答が変わる—— $d(0, 3)$ は 3 でも 1 でもなくなる。

4. 半距離：三角不等式が落ちる

検算 4.1：直線に $d(x, y) = (x - y)^2$ を入れる。非負で、対称で、 $d = 0$ は $x = y$ と同値である。

t	$d(0, t) + d(t, 2t)$	$d(0, 2t)$	判定
0.5	0.5	1.0	破れ
1	2.0	4.0	破れ
2	8.0	16.0	破れ
5	50.0	100.0	破れ

観察 4.2

寄り道がつねに半分で済む。ここには商にも対称化にも当たる修復が無い——平方根を取れば距離になるが、それは同じ距離の目盛りを変えたものではなく、別の関数である。三つの公理を満たしても、最短路という言葉が意味を失う。

5. 超距離：三角不等式が強くなる

検算 5.1：整数に 2 進距離 $|a - b|_2 = 2^{-v_2(a-b)}$ を入れ、4096 未満の相異なる整数の三つ組を乱数で 19986 組取る。

性質	成立した組
通常の三角不等式	19986/19986 (100.00%)
強い形 $d(a, c) \leq \max(d(a, b), d(b, c))$	19986/19986 (100.00%)
最大の二辺が等しい (二等辺)	19986/19986 (100.00%)

観察 5.2

ここでは公理を落としていない。強めている。それでも幾何は幾何らしくなくなる——すべての三角形が二等辺であり、球の中のどの点も中心であり、二つの球は交わるなら一方が他方を含む。公理を強めることも、別の対象に移ることである。

6. 芯：三角不等式が逆を向く

検算 6.1：1+1 次元のミンコフスキー時空で、時間的に隔たった二点 $A = (0, 0)$ 、 $C = (10, 0)$ を結ぶ。間に $B = (5, x)$ を置き、 $|AB| + |BC|$ を測る ($|PQ| = \sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2}$)。

B	$ AB $	$ BC $	$ AB + BC $
(5, 0)	5.0	5.0	10.0 (= $ AC $)
(5, 1)	4.898979486	4.898979486	9.797958971
(5, 2)	4.582575695	4.582575695	9.16515139
(5, 3)	4.0	4.0	8.0
(5, 4)	3.0	3.0	6.0
(5, 4.9)	0.9949874371	0.9949874371	1.989974874

まっすぐ進んだときの $|AC|$ は 10.0 である。(証明終)

観察 6.2

どの寄り道も短い。三角不等式は破れているのではなく、符号が逆になっている—— $|AC| \geq |AB| + |BC|$ である。「最短経路」という言葉が最長経路を指す。

観察 6.3

これは双子のパラドックスである。留まった双子が 10 歳ぶん年を取り、折り返した双子は 6 歳ぶんしか取らない——逆説はどこにもなく、三角不等式の向きが逆なだけである。本稿が言うのはそれだけであり、加速も一般相対論も扱わない。

観察 6.4

落ちているのは三角不等式だけではない——非負性も識別不能の同一性も落ちている（光的に隔たった相異なる二点は間隔 0）。したがってローレンツ間隔は距離の一般化ではなく、別の対象である——論文201 が「正定値性が四つを束ねている」と言ったのは、この境目のことである。

7. 公理を全部満たしても、一つに決まらない

検算 7.1：単位球面の上で、弦の長さ（周りの空間を通る）と大円の長さ（球面の上を通る）を比べる。どちらも四つの公理を満たす。

中心角	弦距離	測地距離	比
0.01	0.009999995833339	0.01	1.000004167
0.1	0.0999583385414	0.1	1.000416788
1	0.958851077208	1	1.042914821
2	1.68294196962	2	1.188395106
3	1.99498997321	3	1.503766956
3.14	1.99999936586	3.14	1.570000498

観察 7.2

比は $\pi/2$ まで開く。二つとも本物の距離であり、公理はどちらも選ばない——「どちらが距離か」は定理ではなく、何を測りたいかの宣言である。飛行機は測地距離を、トンネルは弦距離を使う。

8. 分離子と柵

観察 8.1（点呼）

種類	手放した／変えた公理	使えなくなるもの
距離	なし	—
擬距離	識別不能の同一性	点を点として区別すること
準距離	対称性	往復を同じ量と呼ぶこと
半距離	三角不等式	最短路という言葉
超距離	強めた	三角形が一般の形を取ること
ローレンツ間隔	向きが逆	最短が最短であること

観察 8.2（分離子）

六つを分けているのは四つの公理のどれをどう扱うかである。記号 $d(x, y)$ はそのどれとも書いていない——論文233 の f' と同じ形である。

観察 8.3（柵）

修復できるものと、できないものがある。擬距離は商で直る。準距離は対称化で直るが、答が変わる。半距離は直らない——平方根は別の関数である。そして超距離とローレンツ間隔は直すものではない——それらは壊れた距離ではなく、別の対象である。

観察 8.4

第7節が示すのは、公理を全部満たしても一つに決まらないということである。柵は公理の内側にはない——「どの距離か」は測る前に宣言するしかない。

9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 相異なる三点が互いに距離 **0**（検算2.1）。
2. $d(0, 3) = 3$ 、 $d(3, 0) = 1$ （検算3.1）。

3. 寄り道がつねに半分 (検算4.1) : $t = 5$ で 50 対 100。
4. 強い三角不等式が 19986/19986、二等辺も 19986/19986 (検算5.1)。
5. 寄り道するほど短い (検算6.1) : 10.0 から 1.99 まで。
6. 弦と測地の比が 1.570000 まで開く (検算7.1)。

結び：距離の公理は四つしかない。一つずつ手放してみると、そのたびに名前のついた対象が現れる——擬距離では点が区別できなくなり、準距離では往復が別の量になり、半距離では最短路という言葉が意味を失う。強めても幾何は変わる——2進距離では三角形が一つ残らず二等辺である。そして、落とさずに向きだけ変えたものがある。ローレンツ間隔では $|AC| \geq |AB| + |BC|$ であり、寄り道するほど短くなる。留まった双子は 10、折り返した双子は 6——逆説はどこにもなく、三角不等式の向きが逆なだけである。最後に、公理を全部満たしても距離は一つに決まらない。球面の弦と大円はどちらも本物の距離で、比は $\pi/2$ まで開く——どちらを使うかは定理ではなく宣言である。記号 $d(x, y)$ は、四つの公理のどれをどう扱っているかを何も書いていない。論文233の f' と同じで、柵は記法の外にある。

参考文献

1. Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22.
2. Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Veit und Comp.
3. Hensel, K. (1897). Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 6.
4. Ostrowski, A. (1916). Über einige Lösungen der Funktionalgleichung. *Acta Mathematica*, 41.
5. Wilson, W. A. (1931). On quasi-metric spaces. *American Journal of Mathematics*, 53.
6. Minkowski, H. (1909). Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift*, 10.
7. Hawking, S. W., Ellis, G. F. R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press.
8. 山岸勇輝 (2026). 道具の空間にも計量がある [論文121]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22038594
9. 山岸勇輝 (2026). 「完備」は四つの別の主張であり、四つを一つに束ねているのは計量が正定値であることである [論文201]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22109052
10. 山岸勇輝 (2026). 距離だけを守れと言うと、直線性まで守ってしまう [論文217]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119628
11. 山岸勇輝 (2026). 一つの球から、同じ大きさの球が二つできる [論文225]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120991
12. 山岸勇輝 (2026). 証明を落とした本から学ぶと、等号の身分も一緒に落ちる [論文232]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22127528

