

# 「境界条件」は四つあり、方程式を一文字も変えずに固有値が全部動く

— ディリクレ・ノイマン・ロバン・周期：分離子は「端で何を指定するか」であり、一つは解の存在  
そのものを失う — [論文235]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

## 要旨

論文227は「記号は壁に触れられるかを決めていない」と示した。本稿はその隣を測る——壁に何を書くかである。領域も方程式も一文字も変えず、端の指定だけを四通りに替えて、固有値がどう動くかを数で並べる。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、同じ  $-u'' = \lambda u$  が四つの別の答を返す。最小固有値はディリクレで **9.869617085**、ノイマンで **0**、ロバン ( $h = 1$ ) で **1.707053355**、周期で **0** である (第2節)。第二に、区間ではディリクレとノイマンの差は固有値ちょうど一つである。六段にわたって一致し、最大のずれは  $2.88 \times 10^{-10}$  であった——ただしこれは一次元だけの偶然で、正方形では 6 段中 0 段しか一致しない (第3節)。第三に、ロバンは二つのあいだを連続に滑る。 $h$  を **0** から  $10^6$  へ動かすと、最小固有値は **0**  $\rightarrow$  **0.1967**  $\rightarrow$  **1.707**  $\rightarrow$  **6.905**  $\rightarrow$  **9.486**  $\rightarrow$  **9.830**  $\rightarrow$  **9.8696** とノイマンからディリクレへ移る (第4節)。第四に、これが本稿の芯である。ロバンの係数を負にすると、最小固有値が負になる—— $h = -0.5$  で **-1.089**、 $h = -10$  で **-100.017**。作用素が正でなくなる (第5節)。第五に、周期では固有値がすべて二重になる。零モードのあと、**39.478620540** と **39.478620541** の差は  $7.1 \times 10^{-10}$  である (第6節)。第六に、ノイマンでは解が存在しないことがある。 $f \equiv 1$  では残差  $3.53 \times 10^{-2}$  が残り、 $f = \cos \pi x$  では  $5.75 \times 10^{-12}$  まで落ちる——そして落ちたときも、解は定数の分だけ決まらない (第7節)。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ディリクレ・ノイマン・ロバン・周期の各条件、区間上の固有値の閉じた形、ノイマン問題の可解条件、変分による定式化は、いずれも標準的である。数値解析を論じない——有限要素は道具として使うだけで、収束率も誤差評価も与えない。どの条件が「物理的に正しい」かを決めない——四つは別の問題であって、優劣ではない。二次元以上を扱わない——第3節の正方形は閉じた形の点呼だけであり、領域の形と固有値の関係には立ち入らない。混合条件や非線形境界条件を扱わない——四つは網羅ではなく点呼である。既刊との関係 : 論文227 は「記号は壁に触れられるかを決めていない」と示した——本稿はその壁に何を書くかである。論文234 は「距離」の六別根を数え、公理をどう扱うかが分離子だと示した——本稿の分離子は端で何を指定するかである。論文233 は「微分できる」の六別根を数えた——本稿は同じ形の、境界版である。論文125 は固有名にも住所が要ると示した——第8節の「ロバン」はその一例である。加えたのは四条件の固有値を同一の離散化で並べたこと、区間では二つの離散スペクトルが一つずつで一致し、正方形では一致しないことを示したこと、ロバンの係数を負まで振って作用素の正值性が壊れる点を測ったこと、周期の二重縮退を  $10^{-10}$  の精度で確かめたこと、ノイマンの可解条件を残差として見せたことである。

## 1. 記法と位置づけ

区間  $[0, 1]$  の上で  $-u'' = \lambda u$  を考える。離散化は一次の有限要素 (要素数 800) であり、四条件すべてに同じ離散化を使う。したがって表の差は条件の差だけである。

四つの条件 :

1. ディリクレ :  $u(0) = u(1) = 0$ ——端の値を指定する。
2. ノイマン :  $u'(0) = u'(1) = 0$ ——端の傾き (流束) を指定する。
3. ロバン :  $u'(0) = h u(0)$ 、 $u'(1) = -h u(1)$ ——値と傾きを混ぜる。
4. 周期 :  $u(0) = u(1)$ 、 $u'(0) = u'(1)$ ——端そのものを無くす。

位置づけ : 論文227 は壁に触れられるかを扱った——本稿は壁に何を書くかである。問うのはどれが正しいかではなく、端の一行が中身をどれだけ動かすかである。

## 2. 一つの領域、一つの方程式、四つの答

検算 2.1 : 四条件の最小の六つの固有値を並べる。

| $k$ | ディリクレ         | ノイマン          | ロバン ( $h = 1$ ) | 周期            |
|-----|---------------|---------------|-----------------|---------------|
| 0   | 9.869617085   | 0             | 1.707053355     | 0             |
| 1   | 39.478620540  | 9.869617085   | 13.492380850    | 39.478620540  |
| 2   | 88.827466976  | 39.478620540  | 43.357465877    | 39.478620541  |
| 3   | 157.916917414 | 88.827466976  | 92.770469520    | 157.916917413 |
| 4   | 246.748037301 | 157.916917414 | 161.884268244   | 157.916917414 |
| 5   | 355.322196528 | 246.748037301 | 250.727077848   | 355.322196527 |

閉じた形はディリクレが  $(k + 1)^2\pi^2$ 、ノイマンが  $k^2\pi^2$ 、周期が  $(2m)^2\pi^2$  で、 $\pi^2 = 9.869604$  である。(証明終)

観察 2.2

微分方程式は一文字も変えていない。変えたのは端の一行だけであり、それで固有値が全部動いた——したがって境界条件は方程式の付属品ではなく、方程式の一部である。

### 3. 区間では、二つの差は固有値ちょうど一つである

検算 3.1：ノイマンの  $k + 1$  番目と、ディリクレの  $k$  番目を突き合わせる。

| $k$ | ノイマン ( $k+1$ ) | ディリクレ ( $k$ ) | 差                      |
|-----|----------------|---------------|------------------------|
| 0   | 9.869617085    | 9.869617085   | $6.29 \times 10^{-11}$ |
| 1   | 39.478620540   | 39.478620540  | $1.53 \times 10^{-10}$ |
| 2   | 88.827466976   | 88.827466976  | $2.88 \times 10^{-10}$ |
| 3   | 157.916917414  | 157.916917414 | $2.74 \times 10^{-10}$ |
| 5   | 355.322196528  | 355.322196528 | $9.69 \times 10^{-11}$ |

観察 3.2

区間の上では、ディリクレとノイマンを分けているのは固有値ただ一つ——零にある定数関数——である。

検算 3.3（柵）：単位正方形では、両者の閉じた形は  $\pi^2(m^2 + n^2)$  で、ディリクレは  $m, n \geq 1$ 、ノイマンは  $m, n \geq 0$  である。

| $k$ | ノイマン ( $k+1$ ) | ディリクレ ( $k$ ) | 一致するか |
|-----|----------------|---------------|-------|
| 0   | 9.869604       | 19.739209     | 一致しない |
| 1   | 9.869604       | 49.348022     | 一致しない |
| 2   | 19.739209      | 49.348022     | 一致しない |
| 3   | 39.478418      | 78.956835     | 一致しない |
| 5   | 49.348022      | 98.696044     | 一致しない |

観察 3.4

6 段中 0 段。つまり第3.1節の一致は一次元だけの偶然であり、条件についての定理ではない。一次元で見た関係を次元の上へ持ち出してはいけない——これが本節の柵である。

4. ロバンは、二つのあいだを連続に滑る

検算 4.1： $\hbar$  を動かして最小固有値を測る。

| $h$    | 最小固有値       | 近づいている先                      |
|--------|-------------|------------------------------|
| 0      | 0           | ノイマン                         |
| 0.1    | 0.196710694 |                              |
| 1      | 1.707053355 |                              |
| 10     | 6.904684389 |                              |
| 100    | 9.486484922 |                              |
| $10^6$ | 9.869577601 | ディリクレ ( $\pi^2 = 9.869604$ ) |

#### 観察 4.2

二つの条件は離れた二点ではなく、一本の線の両端である。ただし両端は極限であって、途中のどの  $h$  でもない——論文227 の「触れる壁と触れない壁」と同じ形である。

### 5. 芯：係数を負にすると、作用素が正でなくなる

検算 5.1： $h$  を負まで振る。

| $h$  | 最小固有値          | 符号 |
|------|----------------|----|
| 0    | 0              | 零  |
| -0.5 | -1.089156943   | 負  |
| -1   | -2.382097139   | 負  |
| -2   | -5.756911044   | 負  |
| -5   | -25.640243768  | 負  |
| -10  | -100.016842629 | 負  |

### 観察 5.2

$-u''$  という作用素は一文字も変わっていない。変えたのは端の一行だけであり、それで正値性が壊れた——変分形  $\int |u'|^2 + h(u(0)^2 + u(1)^2)$  の境界項が負に効くからである。

### 観察 5.3

「ラプラシアンは正の作用素である」という言い方には、柵が省かれている——正しくはどの境界条件の下でかである。論文16の言い方を借りれば、この文は柵の外では偽ですらなく、空である。

## 6. 周期には端が無いので、すべて二重になる

検算 6.1：周期条件の固有値と、隣との差を測る。

| $k$ | 固有値           | 次との差                   |
|-----|---------------|------------------------|
| 0   | 0             | $3.95 \times 10^1$     |
| 1   | 39.478620540  | $7.09 \times 10^{-10}$ |
| 2   | 39.478620541  | $1.18 \times 10^2$     |
| 3   | 157.916917413 | $5.10 \times 10^{-10}$ |
| 4   | 157.916917414 | $1.97 \times 10^2$     |

### 観察 6.2

零モードのあと、固有値は二つずつ重なる。端が無いので、右へ進む波と左へ進む波が同じ値段になるからである——差の  $10^{-10}$  は離散化の丸めであって、割れているのではない。

## 7. ノイマンでは、解が存在しないことがある

検算 7.1： $-u'' = f$ 、 $u'(0) = u'(1) = 0$  を最小二乗で解き、残差を見る。

| $f$          | $\int_0^1 f$ | 残差                     |
|--------------|--------------|------------------------|
| 1            | 1            | $3.53 \times 10^{-2}$  |
| $\cos \pi x$ | 0            | $5.75 \times 10^{-12}$ |

行列の階数は 801 次のうち 800 で、核は定数関数である。(証明終)

観察 7.2

$f \equiv 1$  では解が存在しない。両端で流束を 0 に留めながら、内部で正味の湧き出しを許すことはできないからである——可解条件  $\int f = 0$  は方程式ではなく、境界条件が課している。

観察 7.3

そして存在するときも、解は定数の分だけ決まらない。ディリクレでは存在も一意性も無条件だが、ノイマンでは存在に条件がつき、一意性は失われる——論文234 の擬距離で「商を取って直す」と言ったのと同じ操作が、ここでも要る。

## 8. 分離子と柵

観察 8.1 (点呼)

| 条件    | 端で指定するもの  | 失うもの               |
|-------|-----------|--------------------|
| ディリクレ | 値         | なし                 |
| ノイマン  | 傾き (流束)   | 存在と一意性             |
| ロバン   | 値と傾きの混合   | 正值性 ( $h < 0$ のとき) |
| 周期    | 端そのものを無くす | 単純性 (すべて二重)        |

### 観察 8.2 (分離子)

四つを分けているのは端で何を指定するかである。記号  $-u'' = \lambda u$  はそのどれとも書いていない——論文233の  $f'$ 、論文234の  $d(x, y)$  と同じ形である。

### 観察 8.3 (柵)

柵は三つある。第一に、正值性は方程式の性質ではない——境界条件の性質である (第5節)。第二に、存在と一意性も方程式の性質ではない——ノイマンでは両方が落ちる (第7節)。第三に、一次元で見た関係を次元の上へ持ち出してはいけない——区間での一致は正方形では 6 段中 0 段である (第3節)。

### 観察 8.4 (名前について)

「ロバン条件」という呼び名については、ロバン自身がこの条件を扱った形跡が見当たらないことが指摘されている (ガスタフソン=アベ)。論文125が「固有名にも住所が要る」と書いたのは、こういう場合である——本稿は帰属を裁定しない。慣用に従って呼び、呼び名が来歴を保証しないことだけを記す。

## 9. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

1. 同じ方程式が四つの答 (検算2.1) : 最小固有値  $9.8696/0/1.7071/0$ 。
2. 区間では差は固有値一つ (検算3.1) : ずれ  $2.88 \times 10^{-10}$  まで。
3. 正方形では 6 段中 0 段一致 (検算3.3)。
4. ロバンは連続に滑る (検算4.1) : 0 から  $9.869577601$  へ。
5. 負の係数で最小固有値が  $-100.017$  (検算5.1)。
6. 周期はすべて二重 (検算6.1) : 差  $7.09 \times 10^{-10}$ 。
7. ノイマンは解を持たないことがある (検算7.1) : 残差  $3.53 \times 10^{-2}$ 。

結び : 領域を変えず、方程式を一文字も変えず、端の一行だけを四通りに替えた。それで固有値が全部動き、一つでは作用素が正でなくなり、一つでは解が存在しなくなった。「ラプラシアンは正である」も「解は一意である」も、方程式についての文ではない——どちらも境界条件についての文であり、条件を書かないかぎり偽ですらなく、空である。論文227は「記号は壁に触れられるかを決めていない」と書いた。本稿が足すのは、壁

に何を書くかも記号は決めていないということである。そして最後に、一次元で成り立った一致は、正方形では一段も成り立たなかった——見た関係を次元の上へ運ぶには、運んでよい理由が別に要る。

## 参考文献

---

1. Dirichlet, P. G. L. (1876). *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*. Leipzig: Teubner.
  2. Neumann, C. (1877). *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*. Leipzig: Teubner.
  3. Gustafson, K., Abe, T. (1998). The third boundary condition — was it Robin's? *The Mathematical Intelligencer*, 20(1).
  4. Courant, R., Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics, Volume I*. New York: Interscience.
  5. Strauss, W. A. (2008). *Partial Differential Equations: An Introduction*, 2nd edition. Hoboken: Wiley.
  6. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
  7. 山岸勇輝 (2026). ホップは三人いる [論文125]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079384
  8. 山岸勇輝 (2026). 同じ「 $\leq$ 」が、触れる壁と触れない壁を指している [論文227]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22123129
  9. 山岸勇輝 (2026). 「微分できる」は六つあり、そのうち二つは極限を取らない [論文233]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22127806
  10. 山岸勇輝 (2026). 「距離」は六つあり、そのうち一つは三角不等式を逆に満たす [論文234]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22128226
- 

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)