

「発散する」は四つあり、そのうち一つは別の距離で収束する

— チェザロ・アーベル・ボレル・2進：分離子は「どの距離で測るか」と「どの操作を許すか」であり、 $-1/12$ はどの総和法も返さない — [論文239]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

「発散する」という一語が、少なくとも四つの別の状態を指している。本稿はそれを数で分け、最後の一つが「距離の選び方」に相対的であることを示す。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、有界に振動する発散。 $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ の部分和は $1, 0, 1, 0$ を繰り返すが、チェザロ平均は 0.500000000000 、アーベル和も $x \rightarrow 1$ で 0.50000025 へ行き、二つは一致する（第2節）。第二に、非有界に振動する発散。 $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ では $(C, 1)$ が奇数番で 0.500025001 、偶数番で 0 を取り続けて収束しない—— $(C, 2)$ は 0.250139673 、アーベルは 0.250025001875 でどちらも $1/4$ （第3節）。第三に、収束半径が零の発散。オイラー級数は $x = 0.1$ で 11 項目まで 0.09158192 に寄り、26 項目で -0.0195940911 まで飛ぶ——ボレル和 0.091563333939788081876 は、元の微分方程式を残差 8.11×10^{-19} で満たす（第4節）。第四に、これが本稿の芯である。 $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ の部分和は、実数の距離では -1 から $4.0 \rightarrow 2.048 \times 10^3 \rightarrow 2.199 \times 10^{12}$ と離れていくが、2進距離では $0.25 \rightarrow 4.88 \times 10^{-4} \rightarrow 4.55 \times 10^{-13}$ と -1 へ収束する（第5節）。第五に、これが柵である。 $1 + 2 + 3 + \dots$ に対しては、アーベルが 999000 、 $(C, 1)$ が 6.6677×10^7 、 $(C, 2)$ が 2.2229×10^7 と三つとも無限大へ走る——したがって $-1/12$ はどの総和法も返していない（第6節）。

本稿の射程 (scope note)：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——チェザロ総和、アーベル総和、ボレル総和、フロベニウスの定理、 p 進距離、オイラー級数が形式解であること、摂動級数が発散することは、いずれも標準的である。総和法の一般論を作らない——正則性・線形性・安定性の三条件は引くだけで、定理を証明しない。タウバー型定理を扱わない——逆向きの含意には立ち入らない。 p 進解析に立ち入らない—— 2 進距離は第五の証人としてだけ使う。歴史を書かない、そして「区別を立てたから難問が解けた」という因果を主張しない——そういう物語は解けた後から見ると必ずそう見える。本稿が言うのは点呼だけであり、点呼が何かを解くとは主張しない。場の理論を論じない——摂動級数が発散することは参考文献に置くだけである。既刊との関係：論文211 は漸近展開が $1/x$ 項目で最良になることを示した——本稿は打ち切りではなく、総和法の側である。論文232 は $1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$ を解析接続による規約と位置づけた——本稿はその裏取りであり、三つの総和法が実際に失敗することを数で示す。論文234 は超距離を点呼した——第5節の 2 進距離はその道具をそのまま使う。論文197 は「収束する」の四別根を数えた——本稿はその裏返しである。加えたのは四つの発散を同じ形式で並べたこと、 $(C, 1)$ が偶奇で二つの値を取り続けることを両方の側から測ったこと、ボレル和が元の方程式を満たすことを残差で確かめたこと、同じ級数の -1 への距離を二つの計量で並べたこと、 $1 + 2 + 3 + \dots$ に対して三つの総和法が発散することを数で示したことである。

1. 記法と位置づけ

定義 1.1

級数 $\sum a_n$ が発散するとは、部分和 s_n の列が収束しないことをいう。

この定義には、書かれていないものが二つある——どの距離で収束を測るか、部分和以外の操作を許すかである。本稿はその二つを動かす。

総和法に課す三条件（本稿では引くだけで証明しない）：

1. 正則性：収束級数には元の値を返す。
2. 線形性：和と定数倍を保つ。
3. 安定性：先頭を一つ外すと、値がその分だけ変わる。

この三条件があるから、勝手な値を割り当てることはできない。第6節がその実演である。

位置づけ：論文211 はどこで打ち切るかを扱った——本稿は打ち切らずに、別の操作を入れる側である。

2. 第一種：有界に振動する

検算 2.1： $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ の部分和とチェザロ平均を測る。

項数	部分和	チェザロ平均
1	1	1.000000000000
2	0	0.500000000000
3	1	0.666666666667
10	0	0.500000000000
20000	0	0.500000000000

検算 2.2：アーベル和 $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1/(1+x)$ を測る。

x	$1/(1+x)$
0.9	0.526315789474
0.99	0.502512562814
0.999	0.500250125063
0.999999	0.50000025

観察 2.3

二つの方法が同じ $1/2$ を返した。偶然ではない——チェザロ総和可能ならアーベル総和可能で値も同じである（フロベニウス）。本稿はこれを引くだけで証明しない。

3. 第二種：非有界に振動する

検算 3.1： $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ を測る。

項数	部分和	$(C, 1)$	$(C, 2)$
9	5	0.555555556	0.377072310
10	−5	0.000000000	0.339365079
999	500	0.500500501	0.252296826
1000	−500	0.000000000	0.252044530
19999	10000	0.500025001	0.250152181
20000	−10000	0.000000000	0.250139673

$(C, 1)$ は奇数番で $1/2$ 、偶数番で 0 をいつまでも取り続ける——したがって収束しない。(証明終)

検算 3.2：アーベル和 $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1/(1+x)^2$ 。

x	$1/(1+x)^2$
0.9	0.277008310249
0.99	0.252518875786
0.9999	0.250025001875

観察 3.3

同じ級数が、一つの方法では総和不能、二つの方法では $1/4$ である。「発散級数に和がある」は、どの方法でかを言わないかぎり意味を持たない——論文16 の言い方で、柵の外では空である。

観察 3.4（本稿で避けた罠）

最初、 $(C, 1)$ を偶数番だけで表にした。すると 0.000000000 が並び、「 0 に収束する」と読めてしまう——振動する量は両方の位相で見なければならない。論文238 で偶関数の中心差分に引っかけたのと同じ種類の罠である。

4. 第三種：収束半径が零

検算 4.1：オイラー級数 $\sum_{n \geq 0} (-1)^n n! x^{n+1}$ ($x^2 y' + y = x$ の形式解) を $x = 0.1$ で足す。

項数	部分和	最後の項の大きさ
1	0.1	0.1
6	0.09152	0.00012
11	0.09158192	3.6288×10^{-5}
16	0.0914840440064	0.00013076744
21	0.09319427285184512	0.002432902
26	-0.01959409108642064	0.1551121

この級数は $x \neq 0$ のどこでも発散する（項が $n!$ で増えるため）。(証明終)

検算 4.2：ボレル和 $x \int_0^\infty e^{-t} / (1 + xt) dt$ を求め、方程式に入れる。

量	値
ボレル和	0.091563333939788081876
$x^2 y' + y - x$ の残差	8.11×10^{-19}

観察 4.3

発散する級数に、意味のある一つの値が付いた。その値は級数が形式解であった方程式を、実際に満たす——「発散するから無意味」は偽である。どこで打ち切れば最良かは論文211が扱った。本稿は打ち切らない道である。

5. 芯：発散は、距離に相対的である

検算 5.1： $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ の部分和は $2^{n+1} - 1$ である。これと -1 との距離を、二つの計量で測る。

n	部分和	実数の距離	2 進距離
1	3	4.000	0.25
3	15	1.600×10^1	0.0625
10	2047	2.048×10^3	4.883×10^{-4}
20	2097151	2.097×10^6	4.768×10^{-7}
40	2199023255551	2.199×10^{12}	4.547×10^{-13}

観察 5.2

同じ部分和の列が、一方の計量では逃げていき、他方では幾何級数的に -1 へ収束する。2 進距離では $|s_n - (-1)|_2 = 2^{-(n+1)}$ ちょうどである——したがって「この級数は発散する」という文には、どの距離でかという柵が省かれている。

観察 5.3

ここで使った 2 進距離は、論文234 が点呼した超距離そのものである。あちらではすべての三角形が二等辺になることを見た——こちらでは発散が収束に変わる。本稿は p 進解析には立ち入らない——2 進距離は証人としてだけ使う。

観察 5.4

そして両方の答が正しい。実数の側で -1 と書けば偽、2 進の側で発散と書けば偽である——二つは競合していない。別の問いに答えている。

6. 柵：好きな値は割り当てられない

検算 6.1： $1 + 2 + 3 + \dots$ に、第2・3節と同じ方法を当てる。

項数	部分和	(C,1)	(C,2)
10	5.5000×10^1	2.2000×10^1	9.5000
100	5.0500×10^3	1.7170×10^3	5.8950×10^2
1000	5.0050×10^5	1.6717×10^5	5.5890×10^4
20000	2.0001×10^8	6.6677×10^7	2.2229×10^7

検算 6.2：アーベル和 $x/(1-x)^2$ 。

x	$x/(1-x)^2$
0.9	90
0.99	9900
0.999	999000

観察 6.3

三つとも無限大へ走る。つまり $-1/12$ はどの総和法も返していない——「発散級数には好きな値を割り当てられる」という言い方は偽である。

観察 6.4

$-1/12$ が出てくるのは解析接続という別の機構からである——論文232 が規約と位置づけたのはこのことである。本稿が足すのは、総和法の側が実際に失敗するという数である。

7. 分離子と柵

観察 7.1（点呼）

発散の種類	例	何を足すと値が付くか
有界な振動	$1 - 1 + 1 - 1$	平均（チェザロ・アーベル、 $1/2$ ）
非有界な振動	$1 - 2 + 3 - 4$	二回の平均（ $(C, 2)$ ・アーベル、 $1/4$ ）
収束半径が零	オイラー級数	積分変換（ボレル）
実数の距離で発散	$1 + 2 + 4 + 8$	別の距離（2進、 -1 ）
どれでも駄目	$1 + 2 + 3 + \dots$	総和法では付かない

観察 7.2（分離子）

分けているのは二つある——どの距離で測るか、部分和のほかに何を許すか（平均・重み・積分変換）。記号 $\sum a_n$ はそのどちらも書いていない——論文233の f' 、論文234の $d(x, y)$ 、論文235の $-u''$ 、論文236の「 $=0$ 」と同じ形である。

観察 7.3（柵）

柵は三つある。第一に、正則性・線形性・安定性——これがあるから勝手な値は付かない（第6節）。第二に、どの方法でか—— $1 - 2 + 3 - 4$ は $(C, 1)$ では総和不能で $(C, 2)$ では $1/4$ である（第3節）。第三に、どの距離でか—— $1 + 2 + 4 + 8$ は実数で発散し2進で収束する（第5節）。

観察 7.4（本稿がしないこと）

「区別を立てたから難問が解けた」とは書かない。そういう物語は解けた後から見ると必ずそう見える——本稿がしたのは点呼だけであり、点呼が何かを解くとは主張しない。

8. 点呼と結び

本稿が測ったことを並べる。

- チェザロとアーベルが一致（検算2.1・2.2）： 0.5000000000000 と 0.50000025 。
- $(C, 1)$ が偶奇で0と $1/2$ を取り続ける（検算3.1）：収束しない。
- ボレル和が方程式を満たす（検算4.2）：残差 8.11×10^{-19} 。

4. 同じ列が二つの計量で逆を向く (検算5.1) : 2.199×10^{12} と 4.547×10^{-13} 。

5. 三つの総和法が $1 + 2 + 3 + \dots$ で失敗 (検算6.1・6.2)。

結び:「発散する」という一語が、四つの別の状態を指していた。有界に振動するものには平均が効き、非有界に振動するものには二回の平均が要り、収束半径が零のものには積分変換が要る。そして四つ目は、足りないのが操作ではなく、距離であった—— $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ は実数の距離では逃げ、2進距離では -1 へ幾何級数的に収束する。二つの答は競合していない。別の問いに答えている。そして柵がある—— $1 + 2 + 3 + \dots$ に対しては、アーベルも $(C, 1)$ も $(C, 2)$ も無限大へ走る。 $-1/12$ はどの総和法も返していない——それは解析接続という別の機構から来る (論文232)。「発散級数には好きな値を割り当てられる」は偽である。最後に、本稿でも罨に一度かかった—— $(C, 1)$ を偶数番だけで表にして、0 が並ぶのを見た。振動する量は両方の位相で見なければならない——論文238 で偶関数の中心差分に引っかかったのと、同じ種類の罨である。

参考文献

1. Euler, L. (1760). De seriebus divergentibus. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 5.
 2. Abel, N. H. (1881). *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, tome 2. Christiania: Grøndahl.
 3. Cesàro, E. (1890). Sur la multiplication des séries. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 14.
 4. Borel, É. (1899). Mémoire sur les séries divergentes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 16.
 5. Hensel, K. (1897). Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 6.
 6. Hardy, G. H. (1949). *Divergent Series*. Oxford: Clarendon Press.
 7. Dyson, F. J. (1952). Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. *Physical Review*, 85.
 8. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
 9. 山岸勇輝 (2026). 「収束する」は四つの別の主張であり、分けているのは何を捨てることを許すかである [論文197]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107590
 10. 山岸勇輝 (2026). 足し続けると、答から遠ざかる [論文211]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22111772
 11. 山岸勇輝 (2026). 証明を落とした本から学ぶと、等号の身分も一緒に落ちる [論文232]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22127528
 12. 山岸勇輝 (2026). 「距離」は六つあり、そのうち一つは三角不等式を逆に満たす [論文234]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22128226
 13. 山岸勇輝 (2026). 「正則」は三つあり、複素平面では一回微分できれば無限回である [論文238]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22129257
-

