

「0 で割ってはいけない」は一つの禁止ではない

— 逆元・零因子・射影直線・不定形・条件付け・浮動小数点：そして $2=1$ が健全になる環は、ちょうど一つある — [論文242]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月 (第2版)

— *From thinking to syncing.* —

要旨

論文229 は「割り算が戻らない五つの妨げ」を数えた。本稿はその手前の一語を問う。「0 で割ってはいけない」という禁止は、一つの禁止なのか。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、 $2=1$ の偽証明は 0 で二回割っている。中央の等式 $(a+b)(a-b) = b(a-b)$ は 200000 組の乱数で差が 0 の恒等式であり、情報を持たない (第2節)。第二に、0 でなくても約分できない。 $\mathbb{Z}/6$ で $2 \cdot 1 = 2 \cdot 4$ なのに $1 \neq 4$ であり、消去律を破る三つ組は $\mathbb{Z}/6$ で 24 組、 $\mathbb{Z}/12$ で 204 組ある。 $\mathbb{Z}/100$ では 0 でない元の 59.60% が約分に使えない (第3節)。第三に、射影直線では $1/0$ が定義される。半径 10^{-6} のどの方向から近づいても $|1/z|$ の散らばりは 3.49×10^{-10} であり、割れないのは $0/0$ のほうである (第4節)。第四に、解析では $0/0$ が経路に依存する。同じ「 $0/0$ 」の形が 1、0.5、 $+\infty$ 、0 を返す (第5節)。第五に、これが本稿の芯である。同じ一本の大円の、二つの近傍が違う答を返す。等幅の帯では 0.3364、くさび形では 0.5048：極限は $1/3$ と $1/2$ に分かれる (第6節)。第六に、浮動小数点では割り算が全域で定義されている。 $+0.0 = -0.0$ が真のまま、逆数は $+\infty$ と $-\infty$ に分かれる (第7節)。第七に、 $2=1$ が健全になる環がちょうど一つある。零環である (第8節)。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない。体で 0 が可逆でないこと、零因子のある環で消去律が破れること、リーマン球面で $1/0 = \infty$ が定義されること、ボレル=コルモゴロフのパラドックス、IEEE 754 の符号付きゼロは、いずれも標準的である。測定値を引かない。本稿の数はすべて定義から計算したか、擬似乱数で数えたものである。割り算を全域化する代数を作らない。第7節は既存の規格の挙動を読むだけであり、そうした代数体系そのものには立ち入らない。条件付き確率の一般論を作らない。第6節は二つの近傍を並べるだけで、正則条件付き確率の理論は扱わない。偽証明を集めない。本稿が解剖するのは $2 = 1$ の一本だけである。「 0 で割ってよい体系がある」ことに意味づけをしない。どれかが本当の定義だとも、学校の規則が誤りだとも主張しない。示すのは禁止の理由が場所ごとに違うという形式的事実だけである。既刊との関係：論文229は「 $\div$ 」を五つ数え、割り算が戻らない妨げを点呼した。本稿はそのうち「 0 で割れない」という一語を開き、中に六つあることを示す。論文16は「 $=$ 」に六つの根があると示した。第2節は、偽証明が恒等式を条件式として扱ったことだと読み直す。論文236は同じ「 $=0$ 」でも解の集まりが五種類だと示した。第8節は同じ問いを結論の側に向ける。論文164は「確率」に四つの住所があると示した。第6節は零確率での条件付けが一意でないことを数で見る。論文154は順序を書かない極限は量ではないと示した。第6節はその一例である。加えたのは禁止の理由を六つに分けたこと、許可証が「 0 でないこと」ではなく「単射であること」だと数で示したこと、同じ大円の二つの近傍が違う極限を返すことを数え上げたこと、 $2 = 1$ が健全になる環がちょうど一つだと確かめたことである。

1. 記法と位置づけ

設定：割り算 b/a を「 $ax = b$ を満たす x 」と読む。この読み方のもとで、「 0 で割れない」は次のどれかである。

1. 解が存在しない（逆元が無い）。
2. 解が一意でない（消去律が破れている、あるいは近づけ方が指定されていない）。
3. 解は定まるが、極限としては経路に依存する。
4. そもそも禁止が無い（全域に定義されている）。

学校で習う「 0 で割ってはいけない」は、このうち (1) だけを指している。本稿は残りを数える。

規則の是非は論じない。どこで何が壊れるかを数えるだけである。

2. 体：逆元が無い、そして偽証明は二回割っている

よく知られた偽証明を置く。 $a = b$ と仮定し、両辺に a を掛けて $a^2 = ab$ 、 b^2 を引いて $a^2 - b^2 = ab - b^2$ 、因数分解して $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ 、両辺を $(a - b)$ で割って $a + b = b$ 、すなわち $2b = b$ 、両辺を b で割って $2 = 1$ を得る。

検算 2.1 : $a = b$ のもとで、中央の等式の両辺を 200000 組の乱数で測る。

測ったもの	値
$\max (a+b)(a-b) - b(a-b) $	0.000×10^0
$\max (a+b)(a-b) $	0.000×10^0
200000 組のうち $2b = b$ を満たす b の個数	0

観察 2.2

中央の等式は恒等式であり、両辺とも恒等的に 0 である。この偽証明がやっているのは、情報を持たない式から情報を取り出すことである。論文16 の分類で言えば、恒等式を条件式として扱った。破ったのは割り算の規則である前に、等号の身分である。

観察 2.3

そして $2b = b$ は $b = 0$ を強制する。最後の「両辺を b で割る」も、0 で割っている。この証明は 0 で二回割っており、名指しされるのはいつも一回目だけである。

3. 零因子 : 0 でなくても約分できない

検算 3.1 : $\mathbb{Z}/n$ で、0 でない元のうち約分に使えるもの ($x \mapsto cx$ が単射であるもの) を数える。

n	0 でない元	約分できる	できない	できない割合
5	4	4	0	0.0000
6	5	2	3	0.6000
12	11	4	7	0.6364
30	29	8	21	0.7241
100	99	40	59	0.5960

検算 3.2 : $c \neq 0$ 、 $x \neq y$ 、 $cx = cy$ を満たす順序三つ組を全数える。 $\mathbb{Z}/6$ で **24** 組、 $\mathbb{Z}/12$ で **204** 組。最小の例は $2 \cdot 1 = 2$ と $2 \cdot 4 = 2$ であり、 $1 \neq 4$ である。

観察 3.3

約分の許可証は「 $c \neq 0$ 」ではない。「 $x \mapsto cx$ が単射であること」である。体ではこの二つが一致し、一般の環では一致しない。

観察 3.4

したがって「0 でなければ割ってよい」は、体でしか正しくない。 $\mathbb{Z}/100$ では 0 でない元の **59.60%** が約分に使えない。過半数である。

観察 3.5

論文229 は $\mathbb{Z}/12$ で $6x = 1$ に解が無く、 $6x = 0$ に解が 6 個あると示した。本稿は同じ場所を、消去律の側から見ている。同じ環、別の問いである。

4. 射影直線 : $1/0$ は定義される

検算 4.1 : $z = \varepsilon e^{i\theta}$ を 12 方向で取り、 $|1/z|$ を測る。

ε	$ 1/z $ 最小	$ 1/z $ 最大	散らばり
10^{-2}	1.000000×10^2	1.000000×10^2	2.842×10^{-14}
10^{-4}	1.000000×10^4	1.000000×10^4	3.638×10^{-12}
10^{-6}	1.000000×10^6	1.000000×10^6	3.492×10^{-10}

観察 4.2

どの方向から近づいても、発散の仕方が同じである。だから無限遠点を一点だけ足せば $1/0 = \infty$ が定義できる。リーマン球面では、0 で割ることは禁止されていない。

検算 4.3：同じ極限で $0/0$ を $(az)/(bz)$ として測る。

a	b	極限	方向による散らばり
1	1	1.000000000000	1.11×10^{-16}
2	1	2.000000000000	2.22×10^{-16}
1	4	0.250000000000	2.78×10^{-17}
-3	7	-0.428571428571	1.11×10^{-16}

観察 4.4

射影直線で定義できないのは $1/0$ ではなく、 $0/0$ と $\infty - \infty$ である。禁止が消えたのではない。場所が動いたのである。

5. 解析： $0/0$ は経路に依存する

検算 5.1： $x \rightarrow 0$ で「 $0/0$ 」の形になる五つを測る。

式	$x = 10^{-2}$	$x = 10^{-3}$	$x = 10^{-4}$	極限
$\sin x/x$	0.999983333	0.999999833	0.999999998	1
$(1 - \cos x)/x^2$	0.499995833	0.499999958	0.499999997	0.5
x/x^3	1.0×10^4	1.0×10^6	1.0×10^8	$+\infty$
$e^{-1/x^2}/x$	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0
$(e^x - 1)/x$	1.005016708	1.000500167	1.000050002	1

観察 5.2

五つとも「 $0/0$ 」の形をしている。値は 1、0.5、 $+\infty$ 、0 に分かれる。分けているのは記号ではなく、どの関数で 0 に近づくかである。

観察 5.3

ここでの禁止は、代数の禁止と別根である。代数では逆元が存在せず、解析では極限が一意でない。前者は存在の問題、後者は一意性の問題である。

6. 芯：同じ大円の二つの近傍が、違う答を返す

設定：単位球面上の一様分布を取り、平面 $y = 0$ との交わりである一本の大円で条件付ける。この大円は測度 0 である。したがって条件付けは、近傍の極限として定義するほかない。

検算 6.1： $N = 4000000$ 点を取り、同じ大円の二つの近傍で緯度の分布を測る。

近傍の取り方	標本数	緯度の絶対値が 30° 未満の割合	極限
等幅の帯 $ y < 0.01$	40024	0.3364	一様 $\rightarrow 1/3 = 0.3333$
くさび形 $ \text{経度} < 0.01$	25532	0.5048	cos 重み $\rightarrow \sin 30^\circ = 0.5000$

観察 6.2

大円は同じ一本である。違うのは近傍の取り方だけである。それで答が $1/3$ と $1/2$ に分かれる。

観察 6.3

したがって「零確率の事象で条件付ける」は、未定義なのではない。一意でないのである。前の四つと、また別の根である。そして「大円で条件付けた」と書いた文は、まだ何も指定していない。

観察 6.4

論文154 は「順序を書かない極限は、量ではない」と書いた。ここで書かれていないのは順序ではなく、近づけ方の族である。同じ形の柵が、別の場所に立っている。

7. 浮動小数点：割り算は全域で、等号は同一性でない

検算 7.1：IEEE 754 倍精度の挙動を測る。

式	結果
$+0.0 = -0.0$	真
$1/(+0.0)$	$+\infty$
$1/(-0.0)$	$-\infty$
$0.0/0.0$	NaN
$\infty - \infty$	NaN
$\text{NaN} = \text{NaN}$	偽

観察 7.2

二つの値は等号で等しいのに、逆数が違う。ここでは等号が同一性を保証していない。論文16 の六つの根のどれでもない、七つ目の使われ方である。

観察 7.3

IEEE 754 では 0 での割り算が全域で定義されている。禁止は無く、代わりに $\pm\infty$ と NaN が返る。ただし NaN は自分自身と等しくない。全域にした代償である。

8. $2 = 1$ が健全になる環は、ちょうど一つ

検算 8.1：1 から 2000 までの n について、 $\mathbb{Z}/n$ で $2 = 1$ が成り立つ n を全数える。該当は $n = 1$ のみ、一個である。

観察 8.2

$2 = 1$ は $1 = 0$ を強制し、したがって環全体が $\{0\}$ になる。零環である。そこでは 0 は可逆であり ($0 \cdot 0 = 0 = 1$)、0 で割ることが定義されている。

観察 8.3

つまり、あの偽証明は零環の中では健全である。誤っているのは推論の形ではなく、どこに住ませるかを書かなかったことである。「 $2 = 1$ は偽である」という文それ自体が、場所を言うまで決まらない。

観察 8.4

論文236 は $x^2 = -1$ の解の集まりが、住ませる場所で変わると示した。本稿は同じ問いを、解ではなく結論の側に向けた。

9. 分離子と柵

分離子：何を要求しているかである。

場所	要求しているもの	0 で割れるか
体	逆元の存在	割れない
零因子のある環	消去律（単射性）	0 でなくても割れない
射影直線	一点への発散	割れる（0/0 が割れない）
解析（極限）	極限の一意性	経路による
確率（条件付け）	近づけ方の族の指定	一意でない
IEEE 754	全域性	割れる（ $\pm\infty$ と NaN）

柵：

1. 六つが同じ強さだとは言わない。
2. どれかが本当の定義だとは言わない。
3. 学校の規則が誤りだとも言わない。体の中では正しい。書かれていないのは、どこの話かである。
4. 割り算を全域化する体系の是非は論じない。
5. 偽証明を集めない。解剖したのは一本だけである。

10. 点呼と結び

1. 恒等式から情報を取り出していた（検算2.1）：両辺の差も両辺自身も 0 。
2. 0 で二回割っている（観察2.3）： $2b = b$ は $b = 0$ を強制する。
3. 0 でなくても約分できない（検算3.1・3.2）： $\mathbb{Z}/100$ で 59.60% 、反例は $\mathbb{Z}/6$ で 24 組。
4. 射影直線では割れる（検算4.1）：散らばり 3.49×10^{-10} 。
5. 解析では経路による（検算5.1）： 1 、 0.5 、 $+\infty$ 、 0 。
6. 同じ大門の二つの近傍が違う答（検算6.1）： 0.3364 と 0.5048 。
7. 浮動小数点では全域（検算7.1）：等号が同一性を保証しない。
8. $2 = 1$ が健全な環はちょうど一つ（検算8.1）：零環。

結び：「 0 で割ってはいけない」は、一つの禁止ではなかった。体では逆元が無く、零因子のある環では 0 でない元でも割れず、射影直線では割れて $0/0$ が割れず、解析では経路が決め、確率では一意でなく、浮動小数点では禁止そのものが無い。そして最後に、あの偽証明が健全になる場所がちょうど一つある。零環である。誤りは推論の形ではなく、どこの話かを書かなかったことであった。学校の規則は正しい。ただし、住所が書かれていない。

改訂記録

第2版（2026年9月）：主張・定理・検算はいずれも第1版から変更していない。英語版の参考文献で、本体系の既刊を引く行の題名が日本語のまま残っていたので、英語の題名に直した。内容に関わる変更は無く、撤回した内容も無い。

本文の区切りに使っていた横棒を、句読点に改めた（2026年10月）。主張・数・参考文献は変えていない。

参考文献

1. Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.
2. Ahlfors, L. V. (1979). *Complex Analysis*, 3rd edition. New York: McGraw-Hill.
3. Lang, S. (2002). *Algebra*, revised 3rd edition. New York: Springer.
4. IEEE (2019). *IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic*, IEEE Std 754-2019. New York: IEEE.
5. Goldberg, D. (1991). What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23.
6. Jaynes, E. T. (2003). *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge: Cambridge University Press.
7. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある [論文16]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471

8. 山岸勇輝 (2026). 順序を書かない極限は、量ではない [論文154]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084647
9. 山岸勇輝 (2026). 「確率」は四つの住所を持つ [論文164]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092815
10. 山岸勇輝 (2026). 「÷」は五つあり、割れない理由がそれぞれ違う [論文229]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22126445
11. 山岸勇輝 (2026). 同じ「 $=0$ 」でも、解の集まりは五つの別の種類のものである [論文236]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22129043
12. 山岸勇輝 (2026). 足し算にできるかを問う前に、二項演算があるかを問わねばならない [論文241]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22130189

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)