

対象を決めるには、すべての相手が要る

— 米田の補題が要求しているものと、テストを弱めたときに失われるもの：6頂点のグラフ 156 類で
数える — [論文244]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

米田の補題は、対象は他のすべての対象との関係で完全に決まると言う。本稿が問うのは、そのすべてである——テストする相手を減らすと、どこで分離能が落ちるか。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、6頂点のグラフは、ラベル付き **32768** 個から同型類 **156** 類に落ちる（第3節）。第二に、次数列では足りない。相異なる値は **102** しかなく、**84** 類が **30** の組の中で分離されずに残る（第3節）。第三に、スペクトルでも足りない。相異なる値は **151**、**10** 類が **5** 組で残る（第3節）。第四に、これが本稿の芯である。三角形の個数を足しても、**151** のまま動かない——プローブを強めたのに、分離能が一つも上がらなかった（第4節）。第五に、群でも同じことが起きる。 D_4 と Q_8 は同じ指標表を持つが、 $\text{Hom}(\mathbb{Z}/2, -)$ は **6** と **2** で分ける——ところが $\text{Hom}(\mathbb{Z}/4, -)$ は **8** と **8** で分けない（第5節）。第六に、米田は本体系の方法を正当化しない。補題は圏の内部の定理であり、比喩として持ち出した瞬間に第3層に落ちる（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——米田の補題、同スペクトル非同型グラフの存在、 D_4 と Q_8 が同じ指標表を持つことは、いずれも標準的である。測定値を引かない——本稿の数はすべて全数え上げで得たものである。圏論を導入しない——米田の補題の主張だけを使い、証明も一般化も扱わない。グラフ同型判定の計算量を論じない——第3節は6頂点という有限の場合の全数え上げである。表現論を論じない——第5節は指標表を既知として引くだけである。米田の補題が本体系の方法を正当化するとは主張しない——むしろ本稿の第6節は、そう言いたくなることを止めるために書かれている。既刊との関係：論文152は「同じ指標表を持ちながら、同型でない」を示した——本稿はその現象を、プローブの強さの関数として数える。論文153は忘却関手の三段を分け、右随伴が無いことの証拠を挙げた——本稿は同じ圏論の棚の、隣の定理を扱う。論文102は「太鼓の形は聴き分けられるか」を扱った——第3節はその有限版の全数え上げである。論文163は「在る」と「これだ」が別の文だと示した——第6節は「決まる」と「求まる」が別の文だと言う。論文246は同じ Hom の個数を数える道具を、随伴の検算に使う——自由群からの準同型が位数の冪になるかを見る。本稿は同じ計器で分離能を測っており、一つの計器が二つの量を測っている。加えたのはプローブの強さを三段に分けて全数え上げたこと、強いプローブを足しても分離能が上がらない場合を数で示したこと、群でも同じ構造が現れることを Hom の個数で確かめたこと、そして米田を比喻に使わないための柵を明示したことである。

1. 記法と位置づけ

米田の補題は、およそ次のことを言う。ある対象 X は、他のすべての対象 Y からの写像の集まり $\text{Hom}(Y, X)$ によって、同型を除いて完全に決まる。

効いているのは「すべての」である。本稿は、そこを弱めたときに何が起きるかを数える。

設定：対象の集まりと、そこから情報を引き出すプローブを考える。プローブとは、対象に当てて値を返す関数である。プローブが二つの対象に同じ値を返すとき、そのプローブは二つを分離できない。

本稿は米田の補題を証明しない。主張だけを使う。

2. プローブを三段に分ける

題材：6頂点の単純グラフを取る。ラベル付きで $2^{15} = 32768$ 個ある。

プローブを三つ用意する。次数列（各頂点の次数を並べて整列したもの）、スペクトル（隣接行列の固有値）、スペクトルと三角形の個数（両方を組にしたもの）。そして比較のために、同型類そのものを置く。

観察 2.1

三つは順に強くなる。スペクトルは次数列を決める（次数の総和は辺の数の二倍であり、固有値の二乗和から出る）。三角形の個数もスペクトルから出る（ $\text{tr}(A^3)/6$ である）——したがって三段目は、二段目に何も足していないはずである。本稿はそれを数で確かめる。

3. 検算：156 類を、三つのプローブで分ける

検算 3.1：32768 個すべてについて、720 通りの頂点の並べ替えを当てて正規形を取り、同型類を数える。

数えたもの	個数
ラベル付きグラフ	32768
同型類	156

検算 3.2：156 類を三つのプローブで分ける。

プローブ	相異なる値	分離できない類	組の数
次数列	102	84	30
スペクトル	151	10	5
スペクトル + 三角形の個数	151	10	5
同型類そのもの	156	0	0

検算 3.3：スペクトルで分離できない最小の組を取り出す。

グラフ	次数列	辺	三角形
A	0, 1, 1, 1, 1, 4	4	0
B	0, 0, 2, 2, 2, 2	4	0

共有しているスペクトルは $-2, 0, 0, 0, 0, 2$ である。

観察 3.4

この二つは、次数列では分離される $(0, 1, 1, 1, 1, 4)$ と $(0, 0, 2, 2, 2, 2)$ 。ところがスペクトルでは分離されない。弱いプローブが分けて、強いプローブが分けない——「強い」は、分離能について全順序ではない。

4. 芯：プローブを強めても、分離能が上がらないことがある

三角形の個数を足したのに、相異なる値は 151 のまま、分離できない類は 10 のままであった。

観察 4.1

三角形の個数は、スペクトルの関数である $(\text{tr}(A^3)/6)$ 。したがって、足しても情報が増えない。数はそのとおりに動かなかった——予想どおりであることを、数が確認している。

観察 4.2

ここが本稿の芯である。プローブを増やしたときに分離能上がるかどうかは、増やしたものが既存のプローブから復元できるかで決まる。「もっと多くの不変量を測れば、いつかは分かる」は正しくない——独立でない不変量をいくら足しても、一步も進まない。

観察 4.3

米田の補題が要求しているのは、この意味で独立な相手を、取り尽くすことである。有限個のプローブでは、原理的に足りないことがある——156 類のうち 10 類が、151 の値の中に隠れた。

5. 群でも、同じことが起きる

検算 5.1 : D_4 (正方形の対称性) と Q_8 (四元数群) を取る。この二つは同じ指標表を持ち、同型でない (論文 152)。 $\text{Hom}(\mathbb{Z}/n, G)$ の個数、すなわち $g^n = e$ を満たす元の個数を数える。

群	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$\mathbb{Z}/6$	1	2	3	2
S_3	1	4	3	4
D_4	1	6	1	8
Q_8	1	2	1	8

観察 5.2

$\text{Hom}(\mathbb{Z}/2, -)$ は 6 と 2 で、二つを分ける。指標表は分けられなかったのに、たった一つの相手からの写像を数えるだけで分かれた。

観察 5.3

ところが $\text{Hom}(\mathbb{Z}/4, -)$ は 8 と 8 で、分けない。同じ形のプローブでも、相手を取り替えると分離能が変わる——どの相手が効くかは、あらかじめ分からない。だから米田は「すべての相手」を要求する。

観察 5.4

同じ計器が、隣の論文では別の量を測っている。論文246 は、自由群からの準同型の個数が位数の n 乗ちょうどになるかを数え、随伴があるかどうかを検算する。本節が同じ数え方で測ったのは分離能である—— Hom の個数という一つの計器で、片方は対を持つかを、片方は分けられるかを測っている。

6. 米田は、方法を正当化しない

ここは柵である。米田の補題は「対象は、他との関係で決まる」と読める。本体系の方法——ものが何かではなく、何と何を分けるかで書く——と、形が似ている。

観察 6.1

似ていることは、正当化ではない。米田の補題は圏の内部の定理であり、**Hom** 集合と自然変換という具体的な対象についての主張である。方法論はその対象ではない——したがって補題は、方法論について何も言っていない。

観察 6.2

二つの読み方を分ける。(a) 定理としての米田：**Hom** 関手が忠実充満である。証明がある。(b) 比喻としての米田：ものは関係で決まる。証明は無い。(b) を (a) の権威で語ることが、本体系がずっと避けてきた事故である。

観察 6.3

論文163 は「在る」と「これだ」が別の文だと示した。ここでも同じ形の区別が要る——「決まる」と「求まる」は別の文である。米田は X が決まると言う。求め方は与えない。

7. 分離子と柵

分離子：そのプローブが、既存のプローブから復元できるか。復元できるなら、足しても分離能は上がらない。復元できないなら、上がりうる。

柵：

1. 「強いプローブ」は分離能の全順序を与えない——次数列が分けてスペクトルが分けない組がある。
2. 有限個のプローブで足りるとは言わない——6 頂点で既に 10 類が残った。
3. 米田の補題は本体系の方法を正当化しない。
4. 「決まる」は「求まる」を意味しない。
5. グラフ同型判定の計算量については何も言わない。

8. 点呼と結び

1. 6 頂点の同型類は 156 (検算3.1)。
2. 次数列では 84 類が残る (検算3.2)：相異なる値 102。

3. スペクトルでも 10 類が残る (検算3.2) : 相異なる値 151。
4. 三角形を足しても 151 のまま (第4節) : 分離能が上がらない。
5. 弱いプローブが分ける組がある (検算3.3) : 次数列は分け、スペクトルは分けない。
6. $\text{Hom}(\mathbb{Z}/2, -)$ は D_4 と Q_8 を分ける (検算5.1) : 6 と 2。
7. $\text{Hom}(\mathbb{Z}/4, -)$ は分けない (検算5.1) : 8 と 8。

結び：米田の補題が要求しているのは「すべての相手」である。その「すべて」を有限で置き換えると、落ちるものがある。しかも、落ちるかどうかはプローブの強さでは決まらない——次数列が分ける組をスペクトルが分けず、三角形を足しても一つも増えなかった。「もっと測れば分かる」は、独立なものを測るときだけ正しい。そして最後に柵を一つ。米田は「ものは関係で決まる」と読めるが、それは比喻の側である。定理は **Hom** 関手について語っており、方法論については何も語っていない。

改訂記録

第2版 (2026年8月) : 主張・定理・検算はいずれも第1版から変更していない。加えたのは相互参照の一点である——本稿と論文246 (「自由」と「忘却」は対になっている) は同日に公開されたため、初版の時点ではどちらにもまだ DOI が無く、たがいを指すことができなかった。第2版では観察5.4を置き、参考文献に論文246を DOI つきで加えた。同じ **Hom** の個数を数える計器が、本稿では分離能を、論文246では随伴の有無を測っている。あわせて、本文に付けていた注意と強調の記号を削除した——読みやすさのために付けていたが、体系全体で用法が揃っていなかったためである。内容に関わる変更は無く、撤回した内容も無い。

参考文献

1. Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition. New York: Springer.
2. Riehl, E. (2016). *Category Theory in Context*. Mineola: Dover.
3. Cvetkovic, D., Rowlinson, P., Simic, S. (2010). *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Cambridge: Cambridge University Press.
4. Serre, J.-P. (1977). *Linear Representations of Finite Groups*. New York: Springer.
5. Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly*, 73.
6. 山岸勇輝 (2026). スペクトルから形を聴く [論文102]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836735
7. 山岸勇輝 (2026). ホップは三人いる [論文125]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079384
8. 山岸勇輝 (2026). 同じ指標表を持ちながら、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
9. 山岸勇輝 (2026). 何を忘れたかは、写像を数えれば分かる [論文153]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084355

10. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
11. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419
12. 山岸勇輝 (2026). 「自由」と「忘却」は対になっている [論文246]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22159771

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)