

二つの極限は、順序を書くまで答を持たない

— 自発的対称性の破れは、体積と外場のどちらを先に送るかである：同じ磁石が **0** と **0.957504024**
を返す — [論文245]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月 (第2版)

— *From thinking to syncing.* —

要旨

論文154 は「順序を書かない極限は、量ではない」と示した。本稿はその物理版である。自発的対称性の破れは、体積と外場のどちらを先に零へ送るかの問題であり、現象ではなく順序である。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、最小の例を置く。 $x^2/(x^2+y^2)$ は、先に x を送れば **0**、先に y を送れば **1** を返す (第2節)。第二に、磁石でも同じことが起きる。外場 $h=0$ に固定すると、磁化は $N=10$ でも $N=10000$ でも **0.000000000** である (第3節)。第三に、これが本稿の芯である。先に $N \rightarrow \infty$ を送ってから $h \rightarrow 0$ とすると、磁化は **0.957504024** になる。 $m = \tanh(2m)$ の根である (第4節)。第四に、切り替わりが数で見える。 $h=10^{-4}$ を固定すると、磁化は N とともに $0.001730080 \rightarrow 0.018263669 \rightarrow 0.181087757 \rightarrow \mathbf{0.916808310}$ と動く (第4節)。第五に、これが論文175 の「有限系では何も破れない」に数を与える。有限では破れないのではなく、有限では $h \rightarrow 0$ が先に効くのである (第5節)。第六に、同じ形の事故が他にもある。古典極限、回帰時間、細分の極限 (第6節)。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない。二重極限が順序に依存すること、キュリー=ワイス模型の自己無撞着方程式、有限系に相転移が無いことは、いずれも標準的である。測定値を引かない。本稿の数はすべて分配関数から厳密に計算したものである。相転移の理論を作らない。第3節と第4節が使うのは平均場模型ひとつであり、臨界指数もくりこみ群も扱わない。実在の磁石を論じない。平均場は近似であって現実ではない。圏論を導入しない。「有限極限とフィルター余極限が交換する」という定理には触れず、本稿は具体例だけを扱う。「対称性が破れているかどうか」に形而上学的な答を与えない。示すのは答が順序の関数だという形式的事実だけである。既刊との関係 : 論文154 は「順序を書かない極限は、量ではない」と示した。本稿はその物理側の実例に数を与える。論文175 は「有限系では何も破れない」と書いた。第5節はなぜ破れないのかを、順序の言葉で言い直す。論文180 は「古典極限」が四つあると示した。第6節はそのうち二つが順序に依存することを並べる。論文81 は「微視は必ず戻るが、戻る前に宇宙が終わる」と書いた。第6節はそれを体積と時間の順序として読む。論文206 は「空間は近づいても次元は近づかない」と示した。同じく極限が性質を運ばない例である。加えたのは磁化を有限 N で厳密に計算し、切り替わりを数で示したこと、「有限では破れない」を「有限では $h \rightarrow 0$ が先に効く」と言い直したこと、順序に依存する極限の対を一覧にしたことである。

1. 記法と位置づけ

設定 : 二つの径数 ϵ と δ を持つ量 $F(\epsilon, \delta)$ について、二通りの極限を考える。

- 1. 先に $\epsilon \rightarrow 0$ 、あとで $\delta \rightarrow 0$
- 2. 先に $\delta \rightarrow 0$ 、あとで $\epsilon \rightarrow 0$

二つが一致する保証は、どこにも無い。一致しないとき、「 $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ の極限で」という文は何も指定していない。

本稿は相転移の理論を作らない。順序が効く例を数で並べるだけである。

2. 最小の例

検算 2.1 : $F(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ を、二通りの順序で測る。

固定した値	先に $x \rightarrow 0$	先に $y \rightarrow 0$
10^{-2}	0.000000000	1.000000000
10^{-4}	0.000000000	1.000000000
10^{-6}	0.000000000	1.000000000

観察 2.2

答は 0 と 1 である。どちらも正しい。問いが不完全だったただけである。この関数には「原点での値」が無い。あるのは近づき方ごとの値である。

3. 磁石：外場を零に固定すると、何も起きない

設定： N 個のスピンが全員と等しく結びつく平均場模型を取る（キュリー＝ワイス模型）。逆温度を $\beta = 2$ とする。これは秩序相の側である。外場 h をかけ、磁化 m を分配関数から厳密に計算する。

検算 3.1： $h = 0$ に固定して、 N を大きくする。

N	$h = 0$ での磁化
10	0.000000000
100	0.000000000
1000	0.000000000
10000	0.000000000

観察 3.2

どれだけ大きくしても、磁化は厳密に 0 である。理由は明快である。 $h = 0$ では上向きと下向きが完全に対称であり、和を取れば必ず打ち消す。有限の N では、これが何個であっても成り立つ。

4. 芯：順序を入れ替えると、0.957504024 が出る

検算 4.1： h を小さいが零でない値に固定して、 N を大きくする。

N	$h = 10^{-2}$	$h = 10^{-4}$	$h = 0$
10	0.171113372	0.001730080	0.000000000
100	0.916219247	0.018263669	0.000000000
1000	0.959229578	0.181087757	0.000000000
10000	0.959424500	0.916808310	0.000000000

先に $N \rightarrow \infty$ を取ってから $h \rightarrow 0$ とすると、磁化は $m = \tanh(2m)$ の非零解に落ち着く。その値は **0.957504024** である。

観察 4.2

同じ模型、同じ温度、同じ二つの極限。順序だけが違って、答が **0** と **0.957504024** に分かれる。

観察 4.3

表の各列を縦に読むと、切り替わりが見える。 $h = 10^{-4}$ の列は $0.0017 \rightarrow 0.018 \rightarrow 0.18 \rightarrow 0.92$ と動く。どこかに境目があるのではなく、 N と h の比が決めている。

観察 4.4

「熱力学極限を取る」と書いただけでは、まだ何も指定していない。 h をどう扱うかを書くまで、答が決まらない。論文154 が数学側で書いたことが、そのまま物理側に立っている。

5. 「有限系では何も破れない」を、言い直す

論文175 は「有限系では何も破れない」と書いた。本稿はそこに数を入れ、言い方を変える。

観察 5.1

有限では破れないのではない。有限では $h \rightarrow 0$ が先に効くのである。「破れない」と書くと、有限系に何かが欠けているように聞こえる。欠けているのではなく、順序が決まってしまうている。

観察 5.2

実在の磁石が磁化を持つのはなぜか。答は「 N が有限だが巨大で、 h が厳密には零でないから」である。表の $h = 10^{-2}$ 、 $N = 1000$ の行が 0.959229578 を返している。理想極限ではなく、比が決めている。

観察 5.3

本稿は平均場模型ひとつしか使っていない。臨界指数もくりこみ群も扱わず、実在の磁石については何も主張しない。

6. 同じ形の事故は、他にもある

一覧：順序が効く極限の対を並べる。

場面	二つの極限	順序が効くか
自発的対称性の破れ	$N \rightarrow \infty$ と $h \rightarrow 0$	**効く**
ポアンカレ回帰	$V \rightarrow \infty$ と $t \rightarrow \infty$	**効く**
古典極限	$\hbar \rightarrow 0$ と $t \rightarrow \infty$	**効く**
箱数え次元	$\varepsilon \rightarrow 0$ と対象の細さ	**効く**
連続関数の一様収束	$n \rightarrow \infty$ と $x \rightarrow x_0$	**一様なら効かない**

観察 6.1

最後の行だけが違う。一様収束を仮定すると、順序が効かなくなる。つまり「順序が効かない」は定理であって、既定値ではない。論文197 が「収束する」を四つに分けたのは、ここに効いている。

観察 6.2

論文81は「微視は必ず戻るが、戻る前に宇宙が終わる」と書いた。あれも順序である。 $V \rightarrow \infty$ を先に取れば回帰時間は無限になり、 $t \rightarrow \infty$ を先に取れば必ず戻る。

観察 6.3

論文206は、細い円筒が線分に近づいても次元が2のままだと示した。あれは極限が性質を運ばない例であり、本稿は極限が二つあるときの例である。二つは別の事故である。

7. 分離子と柵

分離子：二つの極限を、どの比で結んで送るか。 Nh のような組み合わせが有限に留まるか、零へ行くか、発散するか。それが答を決めている。

柵：

1. どちらの順序が「正しい」とは言わない。問いによって、要る順序が違う。
2. 有限系に相転移があるとは言わない。
3. 実在の磁石については何も主張しない。平均場は近似である。
4. 「対称性が破れているか」に形而上学的な答を与えない。
5. 圏論の定理には触れない。具体例だけを扱う。

8. 点呼と結び

1. 最小の例で0と1（検算2.1）。
2. $h = 0$ では、どの N でも磁化は0（検算3.1）。
3. 順序を替えると **0.957504024**（第4節）： $m = \tanh(2m)$ の根。
4. 切り替わりが数で見える（検算4.1）： $h = 10^{-4}$ で $0.0017 \rightarrow 0.92$ 。
5. 「有限では破れない」は「有限では $h \rightarrow 0$ が先」（観察5.1）。
6. 順序が効かないのは、一様性を仮定したときだけ（観察6.1）。

結び：自発的対称性の破れは、現象ではなく順序であった。同じ模型、同じ温度で、0と**0.957504024**がどちらも正しく出てくる。分けているのは物理ではなく、 N と h をどの比で送ったかである。「熱力学極限で」と

書いた文は、まだ何も指定していない。そして「順序が効かない」は既定値ではなく、一様性という仮定を置いたときに得られる定理である。

改訂記録

第2版（2026年9月）：主張・定理・検算はいずれも第1版から変更していない。英語版の参考文献で、本体系の既刊を引く行の題名が日本語のまま残っていたので、英語の題名に直した。内容に関わる変更は無く、撤回した内容も無い。

本文の区切りに使っていた横棒を、句読点に改めた（2026年10月）。主張・数・参考文献は変えていない。

参考文献

1. Goldenfeld, N. (1992). *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Reading: Addison-Wesley.
2. Ruelle, D. (1969). *Statistical Mechanics: Rigorous Results*. New York: Benjamin.
3. Kadanoff, L. P. (2009). More is the same: phase transitions and mean field theories. *Journal of Statistical Physics*, 137.
4. Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition. New York: Springer.
5. Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition. New York: McGraw-Hill.
6. 山岸勇輝 (2026). ポアンカレ回帰定理と時間の矢 [論文81]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21733062
7. 山岸勇輝 (2026). 順序を書かない極限は、量ではない [論文154]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084647
8. 山岸勇輝 (2026). 「対称性の破れ」は一語ではない [論文175]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22097873
9. 山岸勇輝 (2026). 「古典極限」は一つの極限ではない [論文180]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22099046
10. 山岸勇輝 (2026). 「収束する」は四つの別の主張である [論文197]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22107590
11. 山岸勇輝 (2026). 空間は近づいても、次元は近づかない [論文206]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22110637

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)