

「自由」と「忘却」は対になっている

— 随伴の点呼：Hom の個数が対応を検算し、二つのコンパクト化のうち一方は関手ですらない —

[論文246]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

体系には「余計なものを足す」操作と「捨てる」操作が何度も現れる——自由化、完備化、局所化、コンパクト化。これらは対になっている——ただし全部が対になっているわけではない。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、対になっていることは数で確かめられる。自由群からの準同型の個数は $|G|^n$ ちょうどであり、 D_4 で **8, 64, 512**、 Q_8 でも **8, 64, 512** である（第2節）。第二に、自由でない相手からは、冪にならない。 $|\text{Hom}(\mathbb{Z}/2, -)|$ は D_4 で **6**、 Q_8 で **2** である——8の冪ではない（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。コンパクト化は二つあり、一方は随伴で、他方は関手ですらない。一点コンパクト化は、 $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ というただの包含写像すら延長できない（第4節）。第四に、完備化は、写像の種類を決めるまで随伴でない。一様連続写像を取れば随伴になり、連続写像だけを取ると壊れる（第5節）。第五に、代数的閉包は随伴ではない。存在するが一意的な写像を与えない——論文179の「構成できない」と同じ柵である（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——自由関手が忘却関手の左随伴であること、ストーン=チェックのコンパクト化が左随伴であること、一点コンパクト化が固有写像に対してのみ関手的であること、代数的閉包が普遍性を持たないことは、いずれも標準的である。測定値を引かない——本稿の数はすべて全数え上げで得たものである。圏論の一般論を作らない——随伴の定義だけを使い、随伴関手定理には立ち入らない。位相空間論を論じない——第4節が使うのは延長できない写像の実例ひとつである。選択公理を論じない——第6節は存在と一意性を分けるだけである。「随伴であること」に価値の順序をつけない——随伴でない構成が劣っているとは主張しない。既刊との関係：論文153 は忘却関手を三段に分け、右随伴が無いことの証拠を挙げた——本稿はその対になる側、すなわち左随伴のほうを数える。論文201 は「完備」が四つの別の主張だと示した——第5節はそのうちどれが随伴を持つかを分ける。論文113 は「モジュールは壁ではなく、極限である」と示した——同じ圏論の棚の、隣の概念である。論文149 は引き戻しと押し出しの関手性を扱った——本稿はその関手が対を持つ場合を見る。論文179 は「構成できない」に別根があると示した——第6節は存在するのに一意でないという第四の場合である。論文244 は同じ Hom の個数を数える道具を、対象の分離に使う——巡回群からの準同型が D_4 で 6、 Q_8 で 2 になり、同じ指標表を持つ二つを分ける。本稿は同じ計器で対の有無を測っており、一つの計器が二つの量を測っている。加えたのは随伴を Hom の個数で検算したこと、関手ですらない構成を一つ名指したこと、完備化が写像の種類に依存することを明示したことである。

1. 記法と位置づけ

設定：二つの操作 F と U が随伴であるとは、おおよそ次のことを言う。 $F(A)$ から B への写像と、 A から $U(B)$ への写像とが、一対一に対応する。

「余計なものを足す」操作 F と「捨てる」操作 U が、対になっているという形である。自由群と忘却、完備化と包含、局所化と包含。

本稿は随伴関手定理に立ち入らない。定義だけを使う。そして対になっていない構成を名指すことが目的である。

2. 検算： Hom の個数が、対応を確かめる

検算 2.1 : n 個の生成元を持つ自由群 F_n から、群 G への準同型を数える。随伴が正しければ、これは G の元を n 個自由に選ぶことと同じであり、個数は $|G|^n$ ちょうどでなければならない。

群 G	$ G $	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\mathbb{Z}/6$	6	6	36	216
S_3	6	6	36	216
D_4	8	8	64	512
Q_8	8	8	64	512

観察 2.2

個数が群の構造に一切依らない。 $\mathbb{Z}/6$ と S_3 は可換かどうかが違うのに、どちらも **216** である——自由群から見ると、相手の中身が見えない。見えているのは元の個数だけである。

観察 2.3

これが随伴の意味である。 $\mathbf{Hom}(F_n, G)$ を数えることは、 G の台集合から n 個選ぶことに完全に翻訳される——構造の側の問いが、集合の側の問いに移った。

3. 対比：自由でない相手からは、冪にならない

検算 3.1： $\mathbb{Z}/n$ から G への準同型、すなわち $g^n = e$ を満たす元を数える。

群 G	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$\mathbb{Z}/6$	1	2	3	2
S_3	1	4	3	4
D_4	1	6	1	8
Q_8	1	2	1	8

観察 3.2

数が $|G|$ の冪になっていない。 D_4 で 6、 Q_8 で 2——そして今度は相手の中身が見えている。同じ位数 8 の二つの群が、違う数を返した。

観察 3.3

分離子はここにある。 $\mathbb{Z}/n$ は自由ではない——関係式 $g^n = e$ を課している。関係式を課した分だけ、相手の構造が答に効いてくる。「自由」とは、関係式が一つも無いことである。

観察 3.4

同じ数え方が、隣の論文では分離の道具になる。論文244 は $\text{Hom}(\mathbb{Z}/2, -)$ が D_4 で 6、 Q_8 で 2 を返すことを使い、同じ指標表を持つ二つの群を分けた。本節が同じ個数で見たのは、自由なときだけ位数の冪になるということである—— Hom の個数という一つの計器で、片方は分けられるかを、片方は対を持つかを測っている。

4. 芯：二つのコンパクト化のうち、一方は関手ですらない

設定：空間を「閉じた」空間に埋め込む操作をコンパクト化という。二つある。

- 1. 一点コンパクト化：無限遠に点を一つ足す。実数直線は円になる。
- 2. ストーン=チェックのコンパクト化：可能な限り大きく足す。

検算 4.1： $(0,1)$ から $\mathbb{R}$ へのただの包含写像を取り、一点コンパクト化に延長できるかを調べる。

空間	一点コンパクト化	無限遠点に対応する先
$(0,1)$	円	**両端 0 と 1 の両方**
$\mathbb{R}$	円	$\pm\infty$

観察 4.2

延長できない。 $(0,1)$ の無限遠点は、両端 0 と 1 の両方から近づかれる。包含写像はその二つを $\mathbb{R}$ の 0 と 1 へ送るが、 $\mathbb{R}$ の無限遠点はそこにはない。一点に送りたいのに、行き先が二つある。

観察 4.3

したがって一点コンパクト化は、連続写像の圏の上で関手ですらない。関手になるのは、固有写像に制限したときだけである——随伴かどうか以前に、対応が写像を運ばない。

観察 4.4

ストーン＝チェックのほうは左随伴である。同じ「コンパクト化」という語の下に、随伴であるものと、関手ですらないものが並んでいる。

5. 完備化は、写像の種類を決めるまで随伴でない

論文201 は「完備」が四つの別の主張だと示した。本稿はそのうち距離空間の完備化を取り、随伴になる条件を書く。

写像として何を許すか	完備化は随伴か
一様連続写像	**随伴である**
連続写像だけ	**随伴でない**
リプシッツ写像	**随伴である**

観察 5.1

同じ完備化という操作が、圏を変えると随伴でなくなる。「完備化は自由構成である」と書くとき、どの圏の話かを書かなければならない。

観察 5.2

理由は簡単である。連続写像は、コーシー列をコーシー列に送らない——したがって完備化へ延ばす先が決まらない。一様連続性は、まさにそれを保証するために置かれている。

6. 代数的閉包は、随伴ではない

体 K に対して、代数的閉包 $\bar{K}$ が存在する。「余計なものを足して閉じる」という、完備化とよく似た形をしている。

観察 6.1

ところが随伴ではない。普遍性が成り立たない—— $\bar{K}$ から代数閉体への写像が一意に決まらない。有理数体の代数的閉包には、恒等写像でない自己同型が無数にある。

観察 6.2

存在するのに、一意でない。論文179は「構成できない」に三つの別根があるとした——平均・選択・計算不能。これは第四の場合である——構成できるが、標準的な構成が無い。

観察 6.3

随伴でないことは、欠陥ではない。代数的閉包は完全に有用な構成である——本稿が言うのは、「自由構成」という一語で括るとこの違いが消えるということだけである。

7. 分離子と柵

分離子：三段ある。

1. そもそも写像を運ぶか（関手か）——一点コンパクト化は、連続写像の上では運ばない。
2. 運ぶとして、対を持つか（随伴か）——ストーン＝チェックは持つ。
3. 対を持つとして、どの圏でか——完備化は一様連続なら持ち、連続だけなら持たない。

柵：

1. 随伴でない構成が劣っているとは言わない。
2. 随伴関手定理には立ち入らない。
3. 選択公理を論じない——存在と一意性を分けるだけである。
4. 位相空間論を論じない——延長できない実例を一つ挙げるだけである。
5. 「自由」という語に価値を読み込まない。

8. 点呼と結び

1. 自由群からの準同型は $|G|^n$ ちょうど (検算2.1) : D_4 と Q_8 でともに **512**。
2. 構造が答に見えない (観察2.2) : $\mathbb{Z}/6$ も S_3 も **216**。
3. 自由でない相手からは冪にならない (検算3.1) : **6** と **2**。
4. 一点コンパクト化は関手ですらない (観察4.2) : 行き先が二つある。
5. 完備化は圏を変えると随伴でなくなる (第5節)。
6. 代数的閉包は存在するが一意でない (観察6.1)。

結び : 「余計なものを足す」構成は、三段に分かれた。写像を運ばないもの、運ぶが対を持たないもの、対を持つもの。そして同じ「コンパクト化」という語の下に、左随伴であるものと、関手ですらないものが並んでいた。「自由構成」「完備化」「閉包」といった語は、どれも同じ形に見えて、対の有無が違う。対を持つかどうかは、**Hom** の個数を数えれば見える—— $|G|^n$ になるかどうか、それだけである。

改訂記録

第2版 (2026年8月) : 主張・定理・検算はいずれも第1版から変更していない。加えたのは相互参照の一点である——本稿と論文244 (対象を決めるには、すべての相手が要る) は同日に公開されたため、初版の時点ではどちらにもまだ **DOI** が無く、たがいを指すことができなかった。第2版では観察3.4を置き、参考文献に論文244をDOIつきで加えた。同じ **Hom** の個数を数える計器が、論文244では対象の分離を、本稿では随伴の有無を測っている。あわせて、本文に付けていた注意と強調の記号を削除した——読みやすさのために付けていたが、体系全体で用法が揃っていなかったためである。内容に関わる変更は無く、撤回した内容も無い。

参考文献

1. Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition. New York: Springer.
2. Riehl, E. (2016). *Category Theory in Context*. Mineola: Dover.
3. Engelking, R. (1989). *General Topology*, revised edition. Berlin: Heldermann.

4. Bourbaki, N. (1966). *General Topology*, Part 1. Paris: Hermann.
5. Lang, S. (2002). *Algebra*, revised 3rd edition. New York: Springer.
6. 山岸勇輝 (2026). モジュールは壁ではなく、極限である [論文113]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962996
7. 山岸勇輝 (2026). 分母を決めるのは行列式ではなく、最大不変因子である [論文149]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22083590
8. 山岸勇輝 (2026). 何を忘れたかは、写像を数えれば分かる [論文153]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084355
9. 山岸勇輝 (2026). 順序を書かない極限は、量ではない [論文154]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084647
10. 山岸勇輝 (2026). 「完備」は四つの別の主張である [論文201]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22109052
11. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419
12. 山岸勇輝 (2026). 対象を決めるには、すべての相手が要る [論文244]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22159697

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)