

拡散が捕らえる 4π は、場が広がる 4π と同じ根である

— 定常拡散はラプラス方程式である：どの半径で測っても流束は 12.566370614359 で動かず、二次元では定常の吸収が存在しない — [論文249]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月 (第2版)

— From thinking to syncing. —

要旨

生物の話に 4π が出てきたとき、それは数字の一致なのか、同じ根なのか。本稿が扱うのは一つだけである。細胞が分子を捕らえる速さに現れる 4π は、ガウスの法則の 4π と同じ立体角である。類推ではなく、同じ方程式だからである。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、どの半径で測っても流束は変わらない。 r/a を 1.5 から 1000 まで動かして **12.566370614359**、六つの値の散らばりは 3.55×10^{-15} であった (第3節)。第二に、式を入れずに数値で解いても同じ値が出る。外側の境界を $R/a = 400$ に置くと **12.597865194** となり、ずれは方法ではなく境界から来る。比は **1.002506259** で、 $R/(R-a) = 1.002506266$ と 6.7×10^{-9} ままで一致した (第4節)。第三に、これが本稿の芯である。捕獲率は表面積ではなく、半径に比例する。半径を 10 倍にすると表面積は 100 倍になるのに、捕獲は 10 倍にしかない。単位面積あたりの捕獲は 10 から **0.1** へ落ちる (第5節)。第四に、二次元では定常の吸収が存在しない。流束は $1/\log(R/a)$ で落ち、 $R/a = 10^{100}$ でも **0.004342945** しか残らない (第6節)。第五に、表面はほとんど空けたままでよい。半径比 10^{-3} の受容体なら、**3142** 個で完全吸収体の半分の速さが出る。そのとき覆われているのは表面の **0.0785** パーセントである (第7節)。第六に、この近くに出る π は三種類である。立体角のもの、単位系の規約のもの、そして 4π ではないもの (第8節)。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない。スモルコフスキーの拡散捕捉率、ベルクとパーセルによる受容体の勘定、定常拡散がラプラス方程式に帰着することは、いずれも標準的である。測定値を引かない。本稿の数はすべて定義から計算したものであり、実在の細胞の測定値は一つも使っていない。生理学を論じない。受容体の実際の大きさ・数・分布については何も主張しない。第7節の 10^{-3} という比は仮に置いた値であって、特定の細胞のものではない。生物学的な結論を引き出さない。細胞がなぜその大きさなのか、進化がどう働いたかについては何も述べない。反応律速の場合を扱わない。本稿が扱うのは拡散律速の定常状態だけであり、結合速度や解離は入っていない。生物に現れる 4π を一般に論じない。扱うのは拡散捕捉の一件だけである。数字が一致していることを根拠に何かを結ぶことは、本稿がもっとも避けたいことである。本稿が同根だと言えるのは、同じ方程式から出ているからであって、値が同じだからではない。既刊との関係 : 論文2 は逆二乗場に純粋な立体角が現れることを扱った。本稿は同じ立体角が拡散にも現れることを、方程式の同一性から示す。論文1 は $n = d - 1$ を示した。第6節の二次元の破れはその指数が 0 になる場所である。論文156 は球殻の内部が平らな理由を調和性に帰した。本稿が使うのは同じ調和性である。論文36・37 はストークス抵抗の 6π を解剖した。第8節はその 6π と本稿の 4π が別根であることを並べる。論文44 は 4π の冪が質量次元であり、 $a = 4\pi$ を固定するのが電磁単位の規約だと示した。第8節はその規約としての 4π を三つ目に置く。加えたのは拡散の 4π と場の 4π が同根であることを流束の半径非依存性で確かめたこと、捕獲が半径に比例することを数で示したこと、二次元での消失を $1/\log R$ として数え上げたこと、この近傍の π を三種類に分けたことである。

1. 記法と位置づけ

設定 : 半径 a の球が、周囲にただよう分子を触れた瞬間に吸収するとする。遠方の濃度を C_0 、拡散係数を D とし、定常状態で単位時間に捕らえる量を求める。答は $J = 4\pi DaC_0$ である (スモルコフスキー 1917)。

問いは、この 4π が何かである。数字の一致なのか、それともガウスの法則の 4π と同じものなのか。

本稿の立場は明快である。同じものである。ただし値が同じだからではない。同じ方程式から出ているからである。

本稿は生物学的な結論を引き出さない。細胞の測定値も使わない。扱うのは拡散律速の定常状態だけである。

2. 定常拡散は、ラプラス方程式である

拡散方程式は、濃度の時間変化を D 掛ける濃度のラプラシアンと結ぶ。定常状態では時間変化が消えるので、残るのはラプラシアンがゼロという式だけである。

観察 2.1

これは静電場の方程式と同じ式である。電荷の無い場所での電位も、定常状態の濃度も、同じラプラス方程式を満たす。したがって解も同じ形になり、球対称なら $1/r$ が出る。

観察 2.2

4π が現れるのは、球面を通る流束を数えるときである。ガウスの法則で 4π が出るのと、まったく同じ理由である。球の全立体角が 4π だからである。

観察 2.3

論文156 は、球殻の内部が平らな理由を調和性に帰した。本稿が使っているのは、その同じ調和性である。拡散も、静電場も、球殻の内部も、同じ一つの性質の別の顔である。

3. 検算：どの半径で測っても、流束は同じ

設定： $D = C_0 = a = 1$ と置き、定常解 $C(r) = C_0(1 - a/r)$ から、半径 r の球面を通る流束を測る。ガウスの法則が正しければ、 r を動かしても値は動かないはずである。

r/a	その球面を通る流束
1.0	12.566370614359172
1.5	12.566370614359172
2.0	12.566370614359172
10	12.566370614359172
100	12.566370614359174
1000	12.566370614359171

六つの値の散らばりは 3.55×10^{-15} である。そして $4\pi = 12.566370614359172$ である。

観察 3.1

流束が半径によらないことが、ガウスの法則そのものである。電荷を囲むどの閉曲面でも電束が同じなのと、同じ形をしている。似ているのではない。同じ式の同じ帰結である。

観察 3.2

したがって $J = 4\pi DaC_0$ の 4π は、立体角である。論文2 が逆二乗場で見ただ純粋な立体角と、同じものである。

4. 式を入れずに解いても同じ：そしてずれは境界から来る

検算 4.1：解の形を使わず、 d 次元の動径方程式を 2000001 点で数値積分して流束を出す。外側の境界を $R/a = 400$ と 4000 に置く。

d	R/a	数値	有限 R の式	R が無限大の式
3	400	12.597865194	12.597865278	12.566370614
3	4000	12.569504615	12.569512993	12.566370614
4	400	39.478663560	39.478664346	39.478417604
5	400	78.956833300	78.956836442	78.956835209

観察 4.2

数値は、 R が無限大の式とは 3.1×10^{-2} ずれている。これは誤差ではない。比を取ると **1.002506259** であり、 $R/(R - a) = 1.002506266$ と 6.7×10^{-9} まで一致する。ずれているのは方法ではなく、外側の境界が有限であることである。

観察 4.3

規律：数値と式が合わないとき、まず「どちらが何を仮定しているか」を見る。ここでは式が $R \rightarrow \infty$ を仮定し、数値は $R = 400$ で解いていた。 R を 4000 に伸ばすと、ずれは 3.1×10^{-2} から 3.1×10^{-3} へ、ちょうど十分の一になる。

5. 芯：捕獲率は、表面積ではなく半径に比例する

検算 5.1：半径を変えて、捕獲率と表面積を並べる。

a	捕獲率 $4\pi DaC_0$	表面積 $4\pi a^2$	単位面積あたりの捕獲
0.1	1.256637061	0.125663706	10.000000000
0.5	6.283185307	3.141592654	2.000000000
1.0	12.566370614	12.566370614	1.000000000
5.0	62.831853072	314.159265359	0.200000000
10.0	125.663706144	1256.637061436	0.100000000

観察 5.2

半径を 10 倍にすると、表面積は 100 倍になる。ところが捕獲は 10 倍にしかない。単位面積あたりの捕獲は 10 から 0.1 へ、百分の一に落ちる。

観察 5.3

素朴には「吸収面が広いほどたくさん捕らえる」と考えたくなる。それは表面律速の考え方である。拡散律速では、決めているのは表面ではなく遠方から分子が届く速さであり、それは半径に比例する。 $1/r$ の勾配を球面積 r^2 で掛けると、 r が一つ残るからである。

観察 5.4

この $1/r$ と r^2 の掛け算が、論文1 の $n = d - 1$ そのものである。同じ指数が、電場でも、球殻でも、拡散でも働いている。

6. 二次元では、定常の吸収が存在しない

検算 6.1 : d 次元で同じ計算をすると、解は r の $2 - d$ 乗を含む。 $d = 2$ ではその冪が 0 になり、べき乗の解が消えて対数が現れる。外側の境界を R に置いたときの流束を測る。

R/a	流束 $/(2\pi DC_0)$
10	0.434294482
10^3	0.144764827
10^6	0.072382414
10^{12}	0.036191207
10^{100}	0.004342945

観察 6.2

流束は $1/\log(R/a)$ で落ちる。 R を 10^{100} まで伸ばしても 0.004342945 が残っており、ゼロになるのは極限だけである。だが極限では、定常の解そのものが存在しない。

観察 6.3

平らな世界の生き物は、拡散だけでは餌を集められない。正確には、遠方に壁が要る。 R が有限であるかぎり捕らえられ、無限にすると捕らえられなくなる。

観察 6.4

これは論文1の $n = d - 1$ が $d = 2$ で1になり、 $1/r$ の代わりに $\log r$ が出るところである。同じ指数の話であり、パリティでも対称性でもない。

7. ベルクとパーセル：表面は、ほとんど空けたままでよい

設定：球の表面全部を吸収面にする必要はない。半径 s の小さな受容体を N 個ばらまいたときの捕獲率は、完全吸収体の $Ns/(Ns + \pi a)$ 倍になる（ベルクとパーセル 1977）。

検算 7.1：受容体の半径比を $s/a = 10^{-3}$ と仮に置き、目標の速さに要る個数と、そのとき覆われる面積の割合を出す。

目標	受容体の数	覆われる表面の割合
完全吸収体の 50 パーセント	3142	0.078540 パーセント
90 パーセント	28275	0.706858 パーセント
99 パーセント	311018	7.775442 パーセント

観察 7.2

表面の 0.08 パーセントで、完全吸収体の半分の速さが出る。99 パーセント以上を空けたままでよい。理由は、分子が拡散で何度も表面を叩くからである。一度で当たらなくても、離れてまた戻ってくる。

観察 7.3

この 10^{-3} という比は、本稿が仮に置いた値である。特定の細胞の測定値ではない。本稿は受容体の実際の大きさ・数・分布について、何も主張しない。

8. この近くに現れる π の点呼

同じ話題の周りに π がいくつも出る。三種類ある。

どこに出るか	その π は何か
拡散捕捉 $4\pi DaC_0$	**立体角** (本稿)
球の体積 $4\pi a^3/3$	**立体角**
ガウスの法則	**立体角**
ストークス抵抗 $6\pi\eta a$	π は立体角だが、**6 は別の由来** (論文36・37)
アインシュタインの関係 $D = k_B T / (6\pi\eta a)$	**ストークスの 6π を引き継いだもの**
ガウス単位系のポアソン方程式の 4π	**単位系の規約** (論文44)

観察 8.1

同じ 4π という文字が、立体角のときと単位系の規約のときがある。そして 6π は、 4π の一倍半ではない。論文36・37 が示したとおり、6 の出所が別である。

観察 8.2

本稿が「同根である」と言えるのは、拡散捕捉の 4π だけである。言える理由は、同じラプラス方程式から出ているからであって、値が同じだからではない。値の一致を根拠に結ぶことは、本稿がもっとも避けたいことである。

9. 分離子と柵

分離子：同じ方程式から出ているかである。値が一致していることは、根が同じであることを何も示さない。確かめ方は、動かしてみる。本稿では半径を動かして流束が動かないを見た。

柵：

1. 生理学を論じない。受容体の実際の大きさ・数・分布について何も主張しない。
2. 測定値を一つも使っていない。すべて定義からの計算である。
3. 細胞の大きさや進化について何も述べない。
4. 反応律速を扱わない。拡散律速の定常状態だけである。
5. 生物に現れる 4π を一般に論じない。扱ったのは一件だけである。

6. 数字の一致を根拠に何かを結ばない。

10. 点呼と結び

1. 流束は半径によらない（検算3.1）：**12.566370614359**、散らばり 3.55×10^{-15} 。
2. 数値でも同じ値が出る（検算4.1）：ずれの比 **1.002506259** は $R/(R-a)$ と一致。
3. 捕獲は表面積ではなく半径に比例（検算5.1）：単位面積あたりは **10** から **0.1** へ。
4. 二次元では定常の吸収が無い（検算6.1）： $R/a = 10^{100}$ でも **0.004342945**。
5. 表面の **0.0785** パーセントで半分（検算7.1）：受容体 **3142** 個。
6. この近くの π は三種類（第8節）：立体角・規約・ 4π でないもの。

結び：細胞が分子を捕らえる速さに現れる 4π は、ガウスの法則の 4π と同じ立体角であった。理由は値が同じだからではなく、定常拡散がラプラス方程式だからである。同じ方程式なので、同じ $1/r$ が出て、同じ球面積で掛けられ、同じ 4π が残る。そして半径によらない流束という形で、それが確かめられる。そこから二つのことが出た。捕獲は表面積ではなく半径に比例し、二次元では定常の吸収が存在しない。最後に、表面はほとんど空けたままでよい。**0.08** パーセントで半分が取れる。分子が拡散で、何度でも戻ってくるからである。

改訂記録

第2版（2026年9月）：主張・定理・検算はいずれも第1版から変更していない。英語版の参考文献で、本体系の既刊を引く行の題名が日本語のまま残っていたので、英語の題名に直した。あわせて、本文に残っていた注意と強調の記号を外した。内容に関わる変更は無く、撤回した内容も無い。

本文の区切りに使っていた横棒を、句読点に改めた（2026年10月）。主張・数・参考文献は変えていない。

参考文献

1. Smoluchowski, M. von (1917). Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen. *Zeitschrift für physikalische Chemie*, 92.
2. Berg, H. C., Purcell, E. M. (1977). Physics of chemoreception. *Biophysical Journal*, 20.
3. Berg, H. C. (1993). *Random Walks in Biology*, expanded edition. Princeton: Princeton University Press.
4. Crank, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion*, 2nd edition. Oxford: Clarendon Press.
5. Jackson, J. D. (1998). *Classical Electrodynamics*, 3rd edition. New York: Wiley.
6. 山岸勇輝 (2026). 球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理 [論文1]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
7. 山岸勇輝 (2026). 4π 質量相殺定理 [論文2]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931

8. 山岸勇輝 (2026). ストークス抵抗の 6π の π は、立体角である [論文36]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091319
9. 山岸勇輝 (2026). 6π は $4\pi+2\pi$ か [論文37]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091500
10. 山岸勇輝 (2026). 4π の冪は、質量次元である [論文44]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21602231
11. 山岸勇輝 (2026). 球殻の内部が平らなのは、平均値定理のせいではない [論文156]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091565

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)