

「解けない」は三つの別根を持つ

— ガロア・ヴァンツェル・マチャセビッチ：分離子は「許した道具」である — [論文25]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「解けない」という一語が、少なくとも三つの別のことを指している。本稿はその三つに住所を書き、分離子が「何を道具として許したか」であることを示す。新しい数学定理は主張しない。第一に、障害は導来列が止まることである。 S_3, S_4 の導来列はそれぞれ $6 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 、 $24 \rightarrow 12 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ と1に達するが、 S_5 は $120 \rightarrow 60$ で止まる——止まった先は位数60の単純非可換群 A_5 である（本稿で計算）（第2節）。第二に、ブレーキ。「解けない」のに、根は計算できる。 $x^5 - x - 1$ は既約でガロア群は S_5 、したがって根号による表示を持たない。それでも実根は1.16730397826141868425604589985と、望むだけの桁で求まる（本稿で40桁精度により計算）（第3節）。第三に、もう一つのブレーキ。「五次方程式は解けない」は、そのままでは誤りである。 $x^5 - 2$ の根は $2^{1/5}$ をはじめすべて根号で書ける。正しくは「一般の五次方程式に、根号による一般公式は無い」である——一般についての言明と、個別についての言明は別物である（第4節）。第四に、道具箱を替えると障害も替わる。定規とコンパスでは、作図可能数の拡大次数が2の冪でなければならない。 $2 \cos 20^\circ$ は $t^3 - 3t - 1 = 0$ を満たし次数3だから角の三等分はできない。一方、正十七角形はできる（ $\varphi(17) = 16 = 2^4$ 、ガウス1796）（第5節）。第五に、第三の道具箱は「有限の手続き」である。ヒルベルト第10問題に対しマチャセビッチ（1970）が与えた答は「そのような算法は存在しない」であった。ここでの「解けない」は、公式が無いのも作図できないのでもなく、手続きそのものが無いという意味である（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。アーベル＝ルフィニ、ガロア理論、ヴァンツェルの定理、ガウスの正十七角形、マチャセビッチの定理はいずれも標準的である。本稿が加えるのは、三つの「解けない」に住所を書いたこと、分離子が「許した道具」であると書いたこと、「五次方程式は解けない」という広く流通した言い方に反例で柵を立てたことだけである。

1. 記法と位置づけ

群 G の導来列を $G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq \dots$ と書き、これが自明群に達するとき G を可解という。作図可能数とは、有理数から平方根の反復で到達できる数をいう。

位置づけ：論文85 はガロアからネーターへの系譜を辿った。本稿はガロアの側に戻り、彼が「不可能」と呼んだものが、別の二つの「不可能」と別根であることを示す。

2. 障害は、導来列が止まることである

検算 2.1

群	導来列の位数	可解か
S_3	$6 \rightarrow 3 \rightarrow 1$	可解
S_4	$24 \rightarrow 12 \rightarrow 4 \rightarrow 1$	可解
S_5	$120 \rightarrow 60$ で停止	可解でない
S_6	$720 \rightarrow 360$ で停止	可解でない

(証明終)

観察 2.2

S_5 で列が止まる先は A_5 、位数 60 の単純非可換群である。障害はそこにあり、それ以上は剥がせない。四次までは剥がしきれから公式があり、五次からは剥がせないから無い。

3. ブレーキ：「解けない」のに、根は計算できる

検算 3.1： $x^5 - x - 1$ は既約であり（本稿で確認）、そのガロア群は S_5 である。実根は一つで、本稿の40桁精度の計算により

実根	1.16730397826141868425604589985
残差 $f(\text{根})$	-1.1×10^{-41}

(証明終)

観察 3.2

「解けない」が意味しているのは「四則と根号で組み立てた式が無い」ことだけである。数そのものが手の届かないところにあるという意味ではない——望むだけの桁で書ける。

観察 3.3

「不可能」は対象の性質ではなく、対象と道具の関係である（論文17の住所の話）。

4. もう一つのブレーキ：「五次方程式は解けない」は誤りである

検算 4.1

多項式	既約か	根号で解けるか
$x^5 - 1$	いいえ（円分）	解ける
$x^5 - 2$	はい	解ける（根の一つは $2^{1/5}$ ）
$x^5 - x - 1$	はい	解けない（ S_5 ）

(証明終)

観察 4.2

「五次方程式は解けない」は、そのままでは誤りである。解ける五次方程式はいくらでもある。正しい言明は「一般の五次方程式に、根号による一般公式は無い」である。

観察 4.3

一般についての言明と、個別についての言明を取り違えてはならない。これは体系が繰り返し当ててきたブレーキと同じ型である——「ある場合に成り立たない」と「どの場合にも成り立たない」は違う。

5. 道具箱を替える：定規とコンパス

検算 5.1： $2 \cos 3\alpha = (2 \cos \alpha)^3 - 3(2 \cos \alpha)$ に $\alpha = 20^\circ$ を入れると $2 \cos 60^\circ = 1$ だから、 $t = 2 \cos 20^\circ$ は $t^3 - 3t - 1 = 0$ を満たす。この三次式は有理数体上で既約であり（本稿で確認）、数値でも

$2 \cos 20^\circ$	1.8793852415718167681
$t^3 - 3t - 1$	9.2×10^{-41}

したがって $[\mathbb{Q}(2 \cos 20^\circ) : \mathbb{Q}] = 3$ である。（証明終）

観察 5.2

作図可能数の拡大次数は **2** の冪でなければならない（ヴァンツェル1837）。**3** は **2** の冪ではないから、角の三等分はできない。立方体倍積も $2^{1/3}$ の次数が **3** だから、同じ理由でできない。

検算 5.3： 正 n 角形が作図できるのは $\varphi(n)$ が **2** の冪のときである。

n	$\varphi(n)$	作図
5	4	できる
7	6	できない
9	6	できない
17	16	できる（ガウス1796）
19	18	できない
257	256	できる
65537	65536	できる

（証明終）

観察 5.4

同じ道具で、七角形はできず十七角形はできる。分けているのは一つの数—— $\varphi(n)$ が 2 の冪かどうか——である。

6. 第三の道具箱：有限の手続き

事実 6.1：ヒルベルト第10問題は「与えられたディオファントス方程式が整数解を持つかを判定する算法はあるか」を問う。マチャセビッチ（1970）の答は「無い」であった。

観察 6.2

ここでの「解けない」は、これまでの二つとまた別である。公式が無いのでもなく、作図できないのでもなく、手続きそのものが存在しない。したがって桁数を増やしても、根気を足しても届かない——第3節の五次方程式が三十桁で書けたのとは、事情がまったく違う。

7. 点呼：一語の三つの根

観察 7.1

「解けない」の意味	許した道具	何が障害か	定理
代数的に解けない	四則と根号	ガロア群が可解でない	アーベル＝ルフィニ／ガロア
作図できない	定規とコンパス	拡大次数が 2 の冪でない	ヴァンツェル 1837
決定不能	有限の手続き	そもそも手続きが無い	マチャセビッチ 1970

観察 7.2

分離子は問題の難しさではない。何を道具として許したか、である。道具箱を替えれば、同じ対象が不可能から日常へ移る——五次方程式の根は根号には届かず、計算機からは三十桁の距離にある。

8. 結論

1. 障害は導来列が止まることである（検算2.1）。 S_5 は A_5 で止まる。
2. 「解けない」のに根は計算できる（検算3.1）。1.16730397826141868425604589985。
3. 「五次方程式は解けない」は誤りである（検算4.1）。 $x^5 - 2$ は解ける。
4. 定規とコンパスでは、次数が2の冪であることが柵である（検算5.1・5.3）。七角形はできず、十七角形はできる。
5. 決定不能は、手続きそのものが無いという意味である（事実6.1）。
6. 分離子は「許した道具」である（観察7.1）。

結び：「不可能」は、対象に貼られた札ではない。対象と、こちらが持ち込んだ道具との、関係の名前である。だから道具を書かずに「解けない」と言うことは、まだ何も言っていないに等しい。

参考文献

1. Abel, N. H. (1826). *Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1.
2. Galois, É. (1846). *Œuvres mathématiques*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 11.
3. Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae*. Fleischer.
4. Wantzel, P. (1837). *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2.
5. Hilbert, D. (1900). *Mathematische Probleme*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
6. Matiyasevich, Y. (1970). *Enumerable sets are Diophantine*. Doklady Akademii Nauk SSSR, 191.
7. Artin, E. (1944). *Galois Theory*. University of Notre Dame Press.
8. 山岸勇輝 (2026). 8π は単位の産物である [論文17] 第3版. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600813
9. 山岸勇輝 (2026). ガロアからネーターへ [論文85]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21741344
10. 山岸勇輝 (2026). 王道の交差 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
11. 山岸勇輝 (2026). 同じ指標表を持ちながら、同型でない [論文152]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084202
12. 山岸勇輝 (2026). 点がひとつも無い空間がある [論文155]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22084848

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)