

「二次元だけ特別」は、一つの現象ではない

— 反転は $d=2$ でだけ因子なしで調和性を保つ：同じ $d-2$ が三つの場所に現れ、ホイヘンスはそこに入らない — [論文251]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月 (第2版)

— *From thinking to syncing.* —

要旨

体系には「二次元だけ特別」が何度も現れる。論文249の「二次元では定常の吸収が存在しない」、論文247のホイヘンス、そして調和関数の共形不変性。本稿が問うのは、それらが同じ根なのかである。答は、二つは同根で、一つは $d=2$ の話ですらなかった。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、平均値の性質は厳密に成り立つ。三次元で $1/|x-p|$ の球面平均と中心の値の差は、 R を 0.5 から 1.9 まで動かして 4×10^{-16} 以下であった (第3節)。第二に、破れ方も式どおりである。調和でない関数では、ずれがちょうど $R^2 \Delta u / (2d)$ になる。 $d=5$ で **2.89000000000000**、式の値と一致した (第3節)。第三に、これが本稿の芯である。反転だけで調和性が保たれるのは、 $d=2$ のときだけである。因子を掛けずに $x \mapsto x/|x|^2$ で引き戻すと、 $d=2$ ではラプラシアンが -4.2×10^{-7} 、すなわちゼロなのに、 $d=3$ では -1.728 になる。因子 r^{2-d} を掛けると $d=3$ でも -5.6×10^{-7} に戻る (第4節)。第四に、同じ $d-2$ が三つの場所に出ている。基本解の指数 $2-d$ 、ケルビン変換の因子 r^{2-d} 、ラプラシアンの共形重み $(d-2)/2$ ：三つとも $d=2$ で消える (第5節)。第五に、ホイヘンスはここに入らない。波が尾を引くのは $d=1$ とすべての偶数次元であり、 $d=2$ に固有の話ではない。偶奇の話が $d=2$ にも当たっただけである (第6節)。第六に、論文1の $n=d-1$ は $d=2$ で退化しない。 $n=1$ というごく普通の値であり、消えるのは一階微分ぶん違うポテンシャルの指数のほうである (第7節)。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない。調和関数の平均値の性質、最大値原理、ケルビン変換、 $d \geq 3$ で共形写像がメビウス変換に限られること (リウヴィル 1850)、ホイヘンスの原理が奇数空間次元で成り立つことは、いずれも標準的である。測定値を引かない。本稿の数はすべて定義から計算したものである。共形幾何を論じない。第5節が触れるのは三つの場所に同じ $d-2$ が出るという事実だけであり、共形不変量の理論には立ち入らない。 $d=2$ が「本質的に特別」だとは主張しない。示すのはどの機構が $d=2$ で退化し、どれがしないかだけである。ポテンシャル論を作らない。第2節と第3節は既知の同値性を数で確かめるだけである。複素解析を使わない。第4節の検算は差分でラプラシアンを測っただけであり、正則関数の理論には依らない。既刊との関係：論文249 は二次元で定常の吸収が存在しないことを示した。本稿はその退化が、ケルビン変換の因子と共形重みと同じ $d-2$ から来ていることを見る。論文156 は球殻の内部が平らな理由を調和性に帰し、「平均値定理のせいではない」と書いた。本稿はその調和性そのものを、次元の関数として測る。論文247 は「偶数と奇数で分かれる」が一つの現象でないと示した。第6節はホイヘンスがそちらの家族であり、本稿の家族ではないことを確かめる。論文1 は $n=d-1$ を示した。第7節はそれが $d=2$ で退化しないことを確かめる。論文111 は光が共形構造で止まると示した。第5節の共形重みはその隣にいる。加えたのは反転が因子なしで調和性を保つのが $d=2$ だけだと数で示したこと、三つの退化が同じ $d-2$ から来ていることを一枚に並べたこと、ホイヘンスと $n=d-1$ をそこから外したことである。

1. 記法と位置づけ

設定：関数のラプラシアンがゼロであることを調和という。静電場も、定常拡散も、球殻の内部も、同じ一つの性質の別の顔である (論文156・249)。

問い：体系には「二次元だけ特別」が何度も現れる。論文249 の「二次元では定常の吸収が存在しない」、論文247 のホイヘンス、そして調和関数の共形不変性。これらは同じ根なのか。

答は、二つは同根で、一つは $d=2$ の話ですらなかった。本稿はその判定である。

本稿は $d=2$ が「本質的に特別」だとは主張しない。どの機構が $d=2$ で退化し、どれがしないかを分けるだけである。

2. 調和性の三つの言い方

調和であることは、次の三つと同値である。

1. ラプラシアンがゼロである。
2. どの球面で平均を取っても、中心の値に等しい (平均値の性質)。
3. 内部に最大も最小も持たない (最大値原理)。

観察 2.1

二番目は、片道ではなく同値である。平均値の性質を満たす連続関数は、必ず調和になる。だから「調和だから平均値が成り立つ」と「平均値が成り立つから調和」のどちらから入ってもよい。

観察 2.2

論文156 は「球殻の内部が平らなのは平均値定理のせいではない」と書いた。あれは何が定数を強制しているかの話であった。本稿はその調和性そのものが、次元によってどう振る舞うかを測る。別の軸であり、衝突しない。

3. 検算：平均値の性質は厳密に成り立ち、破れ方も式どおり

検算 3.1：多項式でない調和関数で確かめる。三次元で $u(x) = 1/|x - p|$ 、二次元で $u(x) = \log |x - p|$ を取り、決定的な求積で球面平均を出す。

次元	R	球面平均	中心の値	差
3	0.5	0.36612601296911	0.36612601296911	0
3	1.0	0.36612601296911	0.36612601296911	1.7×10^{-16}
3	1.9	0.36612601296911	0.36612601296911	3.9×10^{-16}
2	1.9	0.97080761238622	0.97080761238622	1.1×10^{-16}

検算 3.2：調和でない関数では、ずれが $R^2 \Delta u / (2d)$ になるはずである。 $R = 1.7$ で確かめる。

関数	中心の値	球面平均	差	式の値
$d = 2 : x^2 - y^2$ (調和)	0.050000000000	0.050000000000	0	0
$d = 3 : x^2 + y^2 - 2z^2$ (調和)	-0.370000000000	-0.370000000000	0	0
$d = 4 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ (調和)	-0.130000000000	-0.130000000000	0	0
$d = 3 : x^2$ (調和でない)	0.090000000000	1.053333333333	0.963333333333	0.963333333333
$d = 5 : x ^2$ (調和でない)	0.550000000000	3.440000000000	2.890000000000	2.890000000000

観察 3.3

調和なら差はゼロ、調和でなければ式の値ちょうどである。平均値の性質は、成り立つか否かの二択ではなく破れの量まで決まっている。

観察 3.4

最大値原理も確かめた。単位正方形でラプラス方程式を解くと、境界の最大 **1.476028904** に対し内部の最大は **1.438591762** である。内部が境界を超えた分は **0** であった。

4. 芯：反転だけで調和性が保たれるのは、 $d = 2$ のときだけ

設定：写像 $x \mapsto x/|x|^2$ (原点についての反転) で関数を引き戻す。調和な関数を引き戻したものは、また調和になるだろうか。

検算 4.1： $u(x) = x_1$ は全次元で調和である。因子を掛けずに引き戻した場合と、 r^{2-d} を掛けた場合 (ケルビン変換) で、ラプラシアンを測る。

d	因子なし	r^{2-d} を掛けたとき
2	-4.219×10^{-7}	-4.219×10^{-7}
3	-1.728	-5.551×10^{-7}
4	-3.169	-7.550×10^{-7}
5	-3.959	-8.549×10^{-7}
6	-2.898	-3.109×10^{-7}

観察 4.2

$d = 2$ だけ、因子なしでゼロである。 $d \geq 3$ では、因子を掛けないかぎり調和性が壊れる。 -1.728 は誤差ではなく、本当に調和でない。

観察 4.3

理由は単純である。因子は r^{2-d} であり、 $d = 2$ ではこれが $r^0 = 1$ になる。掛けても掛けなくても同じだから、掛ける必要が無い。

観察 4.4

これが「 $d = 2$ でだけ共形不変」の中身である。二次元では、正則写像で引き戻しても調和性が保たれる。 $u = x^2 - y^2$ を $f(z) = z^2$ で引き戻すと、ラプラシアンは三つの点で 1.5×10^{-7} 、 3.1×10^{-7} 、 1.7×10^{-7} であった。

5. 同じ $d - 2$ が、三つの場所に出ている

第4節で出た因子 r^{2-d} の指数は、他の場所にも出る。

6. ホイヘンスは、ここに入らない

論文247 は、波が尾を引く次元を数えた。 $d = 2$ でも尾を引く。だから同じ家族に見える。

d	波は尾を引くか
1	引く
2	引く
3	**引かない**
4	引く
5	**引かない**
6	引く
7	**引かない**
8	引く

観察 6.1

尾を引くのは、 $d = 1$ とすべての偶数次元である。 $d = 2$ に固有の話ではない。偶奇の話が、たまたま $d = 2$ にも当たっただけである。

観察 6.2

分けているのはグリーン関数の台であり、本稿の $d - 2$ とは別の機構である。 $d - 2$ は $d = 4$ でも $d = 6$ でも消えない。ホイヘンスは $d = 4$ でも $d = 6$ でも破れる。二つは、当たる次元の集合が違う。

観察 6.3

したがって「二次元だけ特別」を一括りにすると、偶数次元すべての話を二次元の話だと読み違える。

7. 論文1 の $n = d - 1$ は、 $d = 2$ で退化しない

もう一つ、家族に入りそうで入らないものがある。論文1 の $n = d - 1$ である。

d	力の指数 $n = d - 1$	ポテンシャルの指数 $2 - d$
2	1	0
3	2	-1
4	3	-2
5	4	-3
6	5	-4

観察 7.1

$d = 2$ で $n = 1$ である。ごく普通の値であり、何も退化しない。消えるのはポテンシャルの指数のほうであり、力の指数とは一階微分ぶん違う。

観察 7.2

論文249 が二次元で止まったのは、ポテンシャルが $\log$ になるからであって、力の指数が 1 になるからではない。一階の差が、退化するかしないかを分けている。

8. 分離子と柵

分離子： $d - 2$ が消えるか、それとも d の偶奇かである。当たる次元の集合を見れば区別できる。 $d - 2$ は $d = 2$ でだけ消え、偶奇は $d = 2, 4, 6, \dots$ すべてに当たる。

柵：

- 1. $d = 2$ が本質的に特別だとは主張しない。どの機構が退化するかを分けるだけである。
- 2. 共形不変量の理論には立ち入らない。
- 3. 複素解析を使わない。差分でラプラシアンを測っただけである。
- 4. ポテンシャル論を作らない。既知の同値性を数で確かめただけである。

5. 「二次元だけ特別」の全部を数えたとは言わない。本稿が調べたのは五つである。

9. 点呼と結び

1. 平均値の性質は厳密（検算3.1）：差 4×10^{-16} 以下。
2. 破れ方も式どおり（検算3.2）： $d = 5$ で **2.890000000000**。
3. 反転が因子なしで通るのは $d = 2$ だけ（検算4.1）： -4.2×10^{-7} 対 **-1.728**。
4. 同じ $d - 2$ が三つの場所に（第5節）：指数・因子・共形重み。
5. 共形群は $d = 2$ でだけ無限次元（観察5.3）：式は **6** を返すが、実際は無限。
6. ホイヘンスは偶数次元すべて（第6節）： $d = 2$ 固有ではない。
7. $n = d - 1$ は $d = 2$ で退化しない（第7節）： $n = 1$ 、普通の値。

結び：「二次元だけ特別」は、一つの現象ではなかった。そして数えてみると、内訳は予想と違っていた。三つに見えていたもののうち二つは同じ $d - 2$ の顔であり、残る一つ（ホイヘンス）は $d = 2$ の話ですらなかった。偶数次元すべての話が、 $d = 2$ にも当たっていただけである。さらに、家族に入りそうだった $n = d - 1$ は、 $d = 2$ で何も退化しない。見分ける方法の一つである。当たる次元の集合を書く。 $d = 2$ だけに当たるのか、偶数次元すべてに当たるのか、どこにも当たらないのか。集合を書けば、同じ「二次元だけ特別」という言い方の下で別のものが同居していたことが見える。

改訂記録

第2版（2026年9月）：主張・定理・検算はいずれも第1版から変更していない。英語版の参考文献で、本体系の既刊を引く行の題名が日本語のまま残っていたので、英語の題名に直した。内容に関わる変更は無く、撤回した内容も無い。

本文の区切りに使っていた横棒を、句読点に改めた（2026年10月）。主張・数・参考文献は変えていない。

参考文献

1. Axler, S., Bourdon, P., Ramey, W. (2001). *Harmonic Function Theory*, 2nd edition. New York: Springer.
2. Kellogg, O. D. (1929). *Foundations of Potential Theory*. Berlin: Springer.
3. Iwaniec, T., Martin, G. (2001). *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis*. Oxford: Clarendon Press.
4. Courant, R., Hilbert, D. (1962). *Methods of Mathematical Physics*, Volume II. New York: Interscience.
5. 山岸勇輝 (2026). 球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理 [論文1]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186

6. 山岸勇輝 (2026). ストークス抵抗の 6π の π は、立体角である [論文36]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091319
7. 山岸勇輝 (2026). 光はどこまで幾何を決めるか [論文111]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21961685
8. 山岸勇輝 (2026). 球殻の内部が平らなのは、平均値定理のせいではない [論文156]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22091565
9. 山岸勇輝 (2026). 「偶数と奇数で分かれる」は、一つの現象ではない [論文247]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22159832
10. 山岸勇輝 (2026). 拡散が捕らえる 4π は、場が広がる 4π と同じ根である [論文249]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22160409

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)