

「四次元では結び目がほどける」も、一つの現象ではない

— 絡む条件は $p + q = n - 1$ 、結ぶ条件は $n - k = 2$ — 三次元の円では、二つがたまたま重なっている — [論文254]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

四次元では、どんな紐の結び目も必ずほどける。そして四次元では、面が結べる。本稿が問うのは、この二つが同じ根なのかである——答は、違う。二つの別の条件が、三次元の円ではたまたま重なっているだけであった。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、道具を自前で組んで既知の値と照合した。ガウスの絡み数を刻み 4000 で数値積分すると、ホップ絡み目で -1.000000 、離れた二円で 0.000000 である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。一方の輪が張る円板を、他方が何回貫くかを数える。三次元では 1 回。四次元に置いて第四の座標へ 10^{-9} 動かすだけで 0 になる（第3節）。第三に、その差は摂動に対して頑丈である。乱数で押してみると、三次元では 200 回すべてで 1、四次元では 200 回すべてで 0 であった（第4節）。第四に、絡む条件は次元ではなく足し算である。 S^1 と S^2 は四次元で 1 回貫き、五次元へ出すと 0 になる——条件は $p + q = n - 1$ である（第5節）。第五に、だが面は結べる。三葉結び目のアレクサンダー多項式を整数で評価すると $t^2 - t + 1$ であり、恒等的に 1 ではない——四次元の中の紡いだ三葉 (S^2) も同じ多項式を持つ（第6節）。第六に、二つの条件は別である。絡むのは $p + q = n - 1$ 、結べるのは $n - k = 2$ ——三次元の円ではどちらも 2 になる。だから一つの話に見えていた（第7・8節）。

本稿の射程 (scope note)：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ガウスの絡み数、余次元 **3** 以上で球面がほどけること (ゼーマン)、アルティンの紡ぎ、アレクサンダー多項式は、いずれも標準的である。結び目理論を作らない——使うのは一つの積分と、交点の数え上げと、**2 × 2** の行列式だけである。高次元の結び目を分類しない。アレクサンダー多項式が完全不変量だとは言わない——同じ多項式を持つ別の結び目は存在する。第6節が使うのは**1**でなければほどけないという一方向だけである。紡いだ三葉を本稿で構成しない——アルティンの構成と、それが同じ多項式を与えることを引くだけである。交点の数は絡み数ではない——第3節が数えるのは符号をつけない回数であり、符号付きの不変量は第2節の絡み数のほうである。ホップ束を扱わない——本稿の「ホップ絡み目」は名前が同じだけの別のものであり、論文**125**の三人のホップとは無関係である。数値は離散化されている——刻みは絡み数で **4000**、交点の数え上げで **20000** である。既刊との関係：論文**251**は「二次元だけ特別」が一つの現象でないことを示した——本稿はその隣で「四次元だけ特別」を分ける。論文**247**は偶奇の分かれを八つに数えた——同じ形の点呼である。論文**69・105・114**は**4**の特別さを扱い、**105**はエキゾチック $\mathbb{R}^4$ を挙げた——本稿の「円がほどける」はそれとは別根である：微分構造の深い例外ではなく、余次元の数え上げだけから出る。論文**173**と**185**は余次元が効く場面を書いた——本稿はその族の一つ足す。加えたのは絡み数と交点の数え上げを自前で組んで既知の値と照合したこと、 10^{-9} という具体的な量で交点が消えることを見たこと、 S^1 と S^2 の絡みを四次元と五次元で測ったこと、「絡む」と「結ぶ」を二つの条件として並べ、三次元の円で重なることを書いたことである。

1. 記法と位置づけ

設定： n 次元の空間の中に、 k 次元の球面 S^k を置く。 $n - k$ をその余次元という。紐は S^1 、面は S^2 である。

問い：四次元では、どんな紐の結び目も必ずほどける。そして四次元では、面が結べる。この二つは同じ根なのか。

答は、違う。絡む条件と結ぶ条件は別の式であり、三次元の円ではたまたま両方が成り立つ。

本稿は結び目理論を作らない。使うのは一つの積分と、交点の数え上げと、**2 × 2** の行列式だけである。

2. 道具を自前で組み、既知の値と照合する

検算 2.1：ガウスの絡み数を数値積分する。刻みは **4000** で、比べる相手は厳密値である。

配置	絡み数	厳密値
ホップ絡み目	-1.000000	-1
離れた二円	0.000000	0

観察 2.2

小数第6位まで一致した。以下で使う道具は、これで較正できている。

観察 2.3

絡み数は符号付きの量である。第3節で数えるのは符号をつけない交点の回数であり、別の量である——混同しない。

3. 芯：交点は 10^{-9} 動かすだけで消える

設定：一方の輪 C_1 は、円板を張る。他方の輪がその円板を何回貫くかを数える。貫くなら外せず、貫かないなら外せる——これが絡みの素朴な意味である。

検算 3.1：刻み 20000 で数える。

配置	交点の数
三次元のホップ絡み目	1
三次元の離れた二円	0
四次元に置いた同じ絡み目 ($x_4 = 0$)	1

検算 3.2：四次元に置いたまま、第四の座標へ ϵ だけ動かす。

ϵ	交点の数	三次元へ落としたときの絡み数
0	1	-1.000000
10^{-9}	0	-1.000000
10^{-6}	0	-1.000000
10^{-3}	0	-1.000000
10^{-1}	0	-1.000000

観察 3.3

10^{-9} で消える。四次元では、どれほど小さく押しても交点が残らない。

観察 3.4

一方、三次元へ落とした絡み数は -1.000000 のまま動かない。影のほうは絡んで見え続けるが、本体はもう外れている——四次元で外れたものを三次元に描くと、外れたようには描けない。

観察 3.5

理由は数え上げで言える。円板は 2 次元、輪は 1 次元。 n 次元の中で一般の位置に置けば、交わりは $2 + 1 - n$ 次元である—— $n = 3$ なら 0 次元、すなわち点として残る。 $n = 4$ なら -1 次元、すなわち空である。

4. その差は摂動に対して頑丈である

検算 4.1：200 回、乱数で押してみる。四次元では第四の座標に標準偏差 **0.05** の正規乱数を足す。

空間	試行	交点の数
三次元	200 回	つねに 1
四次元	200 回	つねに 0

観察 4.2

三次元では消せない。四次元ではほとんどどう押しても消える。これは一つの配置の性質ではなく、次元の性質である。

5. 絡む条件は、次元ではなく足し算である

設定：相手を輪から面に替える。 $\mathbf{x}_4 = \mathbf{0}$ の中の単位球面 S^2 を置くと、それは三次元の球体を張る。輪がその球体を何回貫くかを数える。

検算 5.1：四次元の中に、球体を一度だけ貫く輪を作る。

配置	貫いた回数
四次元の S^1 と S^2	1
五次元へ出して 10^{-9} ずらすと	0

観察 5.2

四次元では二つの円が絡まないのに、輪と面は絡む。「四次元では何も絡まない」は誤りである。

観察 5.3

条件は次元ではなく足し算で書ける。 S^p と S^q が絡むのは $p + q = n - 1$ のときである。

対象の組	n	$p + q$ と $n - 1$	絡むか
S^1 と S^1	3	2 と 2	絡む
S^1 と S^1	4	2 と 3	絡まない
S^1 と S^2	4	3 と 3	絡む
S^2 と S^2	4	4 と 3	絡まない
S^1 と S^2	5	3 と 4	絡まない

6. だが面は結べる

設定：絡みは二つの対象の話である。結び目は一つの対象の話——一本の輪が、それ自身でほどけない形になっているかどうかである。

検算 6.1：三葉結び目のサイフェルト行列 V ——上段が $-1, 1$ 、下段が $0, -1$ の 2×2 行列——から、 $\Delta(t) = \det(V - tV^T)$ を整数で評価する。

t	$\det(V - tV^T)$	$t^2 - t + 1$
0	1	1
1	1	1
2	3	3
3	7	7
-1	3	3
5	21	21

観察 6.2

$\Delta(t) = t^2 - t + 1$ は恒等的に 1 ではない。ほどけた輪は $\Delta = 1$ であるから、三葉はほどけない。

観察 6.3

アルティンの紡ぎで三葉を四次元の中の S^2 にすると、同じ多項式を持つ。四次元では紐は必ずほどけるのに、面は結べる。

観察 6.4

アレクサンダー多項式は完全不変量ではない——同じ多項式を持つ別の結び目は存在する。本稿が使うのは1でなければほどけないという一方向だけである。

7. 二つの条件は、別の式である

結ぶ条件のほうは、 $n - k = 2$ である（余次元 3 以上ではほどける、ゼーマン）。

対象	n	$n - k$	結べるか
S^1 が三次元の中で	3	2	結べる
S^1 が四次元の中で	4	3	必ずほどける
S^2 が四次元の中で	4	2	結べる
S^2 が五次元の中で	5	3	必ずほどける
S^3 が五次元の中で	5	2	結べる
S^3 が六次元の中で	6	3	必ずほどける

観察 7.1

二つの条件を並べる。絡むのは $p + q = n - 1$ 、結べるのは $n - k = 2$ 。一方は二つの対象の次元の和、他方は一つの対象の余次元であり、そもそも数えているものが違う。

観察 7.2

独立であることは、片方だけが成り立つ場合を出せば分かる。四次元の S^1 と S^2 は絡むのに、その S^1 は結べない——絡みは成り立ち、結びは成り立たない。

8. 三次元の円では、二つがたまたま重なる

問い	効いている条件	答
三次元の二つの円は絡むか	$p + q = n - 1 : 2 = 2$	絡む
三次元の円は結べるか	$n - k = 2 : 3 - 1 = 2$	結べる
四次元の二つの円は絡むか	$p + q = n - 1 : 2 \neq 3$	絡まない
四次元の円は結べるか	$n - k = 2 : 4 - 1 = 3$	ほどける
四次元の輪と面は絡むか	$p + q = n - 1 : 3 = 3$	絡む
四次元の面は結べるか	$n - k = 2 : 4 - 2 = 2$	結べる

観察 8.1

三次元の円では、両方の式がちょうど 2 を返す。だから一つの話に見えていた。

観察 8.2

四次元へ上がると二つは別れる。円については両方とも失われ、面については結びだけが戻る——「四次元では結び目がほどける」という一文は、二つの別のことを同時に言っている。

観察 8.3

論文105 はエキゾチック $\mathbb{R}^4$ を四次元の例外として挙げた。本稿の結果はそれとは別根である——微分構造の深い例外を一切使わず、 $2+1-n$ と $n-k$ という二つの引き算だけから出ている。同じ「四次元だけ特別」という言い方の下に、少なくとも三つの別のものが住んでいる。

9. 点呼と結び

1. 道具は校正した（検算2.1）：ホップ絡み目 -1.000000 、離れた二円 0.000000 。
2. 交点は 10^{-9} で消える（検算3.2）：三次元で 1、四次元で 0。
3. 影のほうは動かない（観察3.4）：絡み数は -1.000000 のまま。
4. 摂動に頑丈（検算4.1）：200 回すべてで 1 と 0。
5. 輪と面は四次元で絡む（検算5.1）：1 回、五次元では 0 回。
6. 面は結べる（検算6.1）： $\Delta(t) = t^2 - t + 1 \neq 1$ 。
7. 二つの条件は別（観察7.1）： $p+q = n-1$ と $n-k = 2$ 。
8. 三次元の円で重なる（観察8.1）：どちらも 2 を返す。

結び：「四次元では結び目がほどける」は、一つの現象ではなかった。絡むかどうかは二つの対象の次元の和が決め、結べるかどうかは一つの対象の余次元が決める。別々の引き算であり、たがいに導き合わない。三次元の円ではどちらも 2 を返すので、一つの事実のように見えていただけである。分けるものは一つ——何を数えているのかを書き出すこと。二つの次元の和なのか、一つの余次元なのか。書き出せば、四次元で紐がほどけることと面が結べるのが矛盾でも偶然でもないことが見える。

参考文献

1. Rolfsen, D. (1976). *Knots and Links*. Berkeley: Publish or Perish.
2. Kawauchi, A. (1996). *A Survey of Knot Theory*. Basel: Birkhauser.
3. Zeeman, E. C. (1963). Unknotting Combinatorial Balls. *Annals of Mathematics*, 78(3).
4. Artin, E. (1925). Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R^4 . *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 4.
5. Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press.
6. 山岸勇輝 (2026). 次元センサス [論文69]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650011
7. 山岸勇輝 (2026). 4次元だけの例外 [論文105]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836925
8. 山岸勇輝 (2026). 「4次元らしさ」を担うのは誰か [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
9. 山岸勇輝 (2026). ホップは三人いる [論文125]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079384
10. 山岸勇輝 (2026). 小平の柵は正值性ではなく、整数性である [論文173]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22094507
11. 山岸勇輝 (2026). 欠陥を分類しているのは、方程式ではなく行き先の空間である [論文185]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105496
12. 山岸勇輝 (2026). 「偶数と奇数で分かれる」は、一つの現象ではない [論文247]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22159832
13. 山岸勇輝 (2026). 「二次元だけ特別」は、一つの現象ではない [論文251]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22161063

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)