

4π が出るのは、源が点のときだけである

— 源の次元を一つ上げると 4π は 2π になり、 $1/r$ は対数になる — 生体の源はしばしば点ではない

— [論文258]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

論文02は、逆二乗場に純粋な立体角 4π が現れることを示した。本稿が問うのは、その 4π はいつ現れないのかである——答は、源が点でなくなった瞬間である。源の次元を一つ上げるだけで、 4π は 2π になり、 $1/r$ という落ち方は対数に変わる。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、点源では 4π がそのまま分母に立つ。 $\phi = I/(4\pi\sigma r)$ に $I = 1\mu\text{A}$ 、 $\sigma = 0.33\text{ S/m}$ 、 $r = 1\text{ cm}$ を入れると $24.1144\mu\text{V}$ である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。源を線にすると 4π が消え、 2π と対数が出る。 $\phi = (I'/2\pi\sigma)\ln(r_2/r_1)$ の前係数は $4.822877 \times 10^{-5}\text{ V}$ であり、 4π はどこにも無い（第3節）。第三に、落ち方が逆を向く。2 mm から 50 mm へ離れると、点源は $120.5719 \rightarrow 4.8229\mu\text{V}$ と 25.0 分の 1 になるのに、線源は $33.4296 \rightarrow 188.6721\mu\text{V}$ と増える（第3節）。第四に、三つの源で立体角を点呼する。点源 $4\pi = 12.566371$ 、線源 $2\pi = 6.283185$ 、面源 2π ——源の次元を一つ上げるたびに、落ち方が $1/r \rightarrow \ln \rightarrow$ 一定と平らになる（第4節）。第五に、生体の源はしばしば円柱である。毛細血管の周りの酸素の到達距離は $L = \sqrt{2DC_0/M}$ で、安静時は $316.8\mu\text{m}$ である（第5節）。第六に、その長さを決めているのは安静時ではない。最大運動時は $44.8\mu\text{m}$ まで縮み、実際の毛細血管間隔 $20\text{--}80\mu\text{m}$ と合う—— $L \propto M^{-1/2}$ なので、需要が 50 倍で距離は 7.0711 分の 1 になる（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——点源・線源・面源の電位、容積導体という近似、クローの円柱模型は、いずれも標準的である。電気生理学を作らない——使うのは三つの解と、一つの平方根と、単位の換算だけである。 4π の由来を論じない——論文02 が扱う。本稿は逆に、その 4π が消える条件だけを扱う。逆問題に入らない——論文99 は境界データから内部の導電率を復元できるかを問い、論文159 は不良設定を分けた。本稿は順方向であり、源の形が与えられたときにどの立体角が出るかだけを見る。捕捉率を扱わない——論文249 はスモールコフスキーの捕捉率を球・定常・吸収境界で扱った。本稿は円柱で、消費項があり、問うのが捕捉率ではなく到達距離である。生理学を主張しない——毛細血管の配置がなぜそうになっているかの説明を与えない。一致を報告するだけであり、因果を述べない。生体組織を等方均質として扱っている——現実の組織は異方的で不均質である。数値は桁を見るための値であり、特定の組織の測定値ではない。源を無限に長い円柱として扱っている——有限長では端で 4π 側へ戻る。本稿が言うのは、無限に長い極限で 4π が出ないという一点である。既刊との関係：論文02 は逆二乗場に純粋立体角 4π が現れることを示した——本稿はその 4π の定義域を書く：点源・三次元・等方の三つが揃ったときだけである。論文249 は拡散が捕らえる 4π と場が広がる 4π が同根だと示した——本稿は同じ 4π が出ない場合を並べる。同根の確認と、定義域の確認は対になっている。論文01 は $n = 2$ が唯一であることを四方向から示した——本稿が動かすのは指数ではなく源の次元であり、別の軸である。論文199 は帰ってこられるかを分母の指数が決めると書いた——本稿の第4節も分母の形を並べるが、問うのは再帰性ではなく落ち方である。論文112 は分解能を六つの別根の一つに数えた——本稿は測定の分解能を扱わない。加えたのは 4π が現れる条件を「点源・三次元・等方」の三つとして書き出したこと、源の次元を一つ上げると立体角が半分になり落ち方が平らになるという対応を点呼にしたこと、点源と線源で距離依存が逆を向くことを 25.0 倍と具体的な数で見たこと、毛細血管の到達距離を安静時 $316.8\mu\text{m}$ と最大時 $44.8\mu\text{m}$ の両方で計算し、実測の間隔と合うのが後者であるとしたことである。

1. 記法と位置づけ

設定：導電率 σ の一様な媒質（容積導体）の中に電流源を置き、そこから距離 r の電位 ϕ を見る。

受け取るもの：論文02 は、逆二乗場に純粋な立体角 4π が現れることを示した。本稿はそれを前提として受け取る—— 4π がなぜ現れるかは扱わない。

問い：その 4π は、いつ現れないのか。

答は、源が点でなくなった瞬間である。 4π が出るのは点源・三次元・等方の三つが揃ったときだけであり、源の次元を一つ上げるだけで消える。

2. 点源： 4π がそのまま分母に立つ

設定：点電流源 I の作る電位は $\phi = I/(4\pi\sigma r)$ である。 $4\pi = 12.566371$ が分母に立っている。

検算 2.1 : $I = 1\mu\text{A}$ 、 $\sigma = 0.33 \text{ S/m}$ で数える。

距離 r	電位 ϕ
5 mm	48.2288 μ V
10 mm	24.1144 μ V
20 mm	12.0572 μ V
50 mm	4.8229 μ V

観察 2.2

距離を 2 倍にすると電位はちょうど半分になる。 $1/r$ である——そして分母の 4π は球の全立体角そのものである（論文02）。

3. 芯：源を線にすると 4π が消える

設定：無限に長い直線状の源を置く。単位長あたりの電流を I' とすると、電位差は

$$\phi = \frac{I'}{2\pi\sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

である。分母は 2π であり、 4π はどこにも無い。そして $1/r$ ではなく対数である。

検算 3.1： $I' = 10^{-4}$ A/m、 $\sigma = 0.33$ S/m。前係数は $I'/(2\pi\sigma) = 4.822877 \times 10^{-5}$ V である。

r_2/r_1	$\ln(r_2/r_1)$	電位差
2	0.693147	33.4296 μ V
10	2.302585	111.0508 μ V
100	4.605170	222.1017 μ V

観察 3.2

4π が消えた。源の次元を 0 から 1 に上げただけで、分母の立体角が 12.566371 から 6.283185 に半分になった。

検算 3.3：落ち方そのものが逆を向く。同じ距離の刻みで両方を並べる（線源は $r_1 = 1\text{ mm}$ を基準にとる）。

距離	点源	線源
2 mm	120.5719 μ V	33.4296 μ V
5 mm	48.2288 μ V	77.6212 μ V
10 mm	24.1144 μ V	111.0508 μ V
20 mm	12.0572 μ V	144.4805 μ V
50 mm	4.8229 μ V	188.6721 μ V

観察 3.4

点源は **25.0** 分の **1** に落ち、線源は **5.64** 倍に増える。同じ距離を離れているのに、向きが逆である——源の形を書かずに「距離が離れれば弱くなる」と言うことはできない。

観察 3.5

分離子——何を動かすと 4π が消えるか。源の次元を一つ上げるだけである。媒質も、電流も、次元数も動かしていない。

4. 三つの源で立体角を点呼する

検算 4.1：三次元の中に、**0** 次元・**1** 次元・**2** 次元の源を置いて並べる。

源	源の次元	出る立体角	落ち方
点	0	$4\pi = 12.566371$	$1/r$
線（円柱）	1	$2\pi = 6.283185$	$\ln(1/r)$
面（層）	2	$2\pi = 6.283185$	一定

観察 4.2

源の次元を一つ上げるたびに、落ち方が一段平らになる—— $1/r$ 、対数、一定。面源では距離に依らなくなり、立体角は 2π で頭打ちになる。

観察 4.3

4π が出るのは一行目だけである。条件を書き出すと点源・三次元・等方の三つであり、どれか一つでも欠けると 4π は出ない。

観察 4.4

論文249 は、拡散が捕らえる 4π と場が広がる 4π が同根であることを示した。本稿はその裏側である——同根であることの確認と、定義域の確認は対になっている。どこまで同じかを言うには、どこから違うかを言わねばならない。

5. 実例：毛細血管は点ではなく円柱である

設定：組織の酸素は毛細血管から拡散し、途中で消費される。到達距離は

$$L = \sqrt{\frac{2DC_0}{M}}$$

である（ D は拡散係数、 C_0 は血管壁での濃度、 M は単位体積あたりの消費率）。

検算 5.1： $D = 2.0 \times 10^{-9} \text{m}^2/\text{s}$ 、 $\alpha = 1.4 \times 10^{-3} \text{mol}/(\text{m}^3 \cdot \text{mmHg})$ 、 $P = 40 \text{ mmHg}$ 。
 $C_0 = \alpha P = 0.056000 \text{mol}/\text{m}^3$ である。

状態	消費率 M [mol/(m ³ · s)]	到達距離 L
安静時の骨格筋（0.3 mL/100g/min）	2.232143×10^{-3}	316.8 μm
中程度（3.0 mL/100g/min）	2.232143×10^{-2}	100.2μm
最大運動時（15.0 mL/100g/min）	1.116071×10^{-1}	44.8 μm

観察 5.2

ここは円柱なので、第3節の表の二行目にあたる。 4π ではなく 2π の世界であり、電位なら対数になる場所である——本節が計算しているのは電位ではなく到達距離だが、源の形が円柱であるという点は同じである。

6. 長さを決めているのは、平均ではない

検算 6.1：実際の毛細血管の間隔（クロー半径）は **20–80 μm** である。上の三行と突き合わせる。

状態	L	実測の 20–80 μm と
安静時	316.8μm	4 倍以上遠い（過剰に見える）
中程度	100.2μm	やや遠い
最大運動時	44.8μm	合う

観察 6.2

安静時の需要では **316.8 μm** まで届くので、**20–80 μm** という間隔は過剰に見える。一致するのは最大運動時である——長さを決めているのは平均ではなく最大需要のほうである。

観察 6.3

$L \propto M^{-1/2}$ である。需要が **50.0** 倍になると距離は $\sqrt{50} = \mathbf{7.0711}$ 分の **1** に縮む——
316.8/7.0711 = 44.8 で、表の一行目と三行目がちょうど対応している。

観察 6.4

正直に書くべき点——本稿は一致を報告しているだけである。毛細血管の配置が最大需要で決まっていると主張しない——そのためには発生の側の証拠が要り、本稿は持っていない。組織を等方均質として扱っている点も、現実とは違う。

7. 点呼と結び

1. 点源では 4π が立つ (検算2.1) : $r = 1 \text{ cm}$ で $24.1144\mu\text{V}$ 。
2. 線源では消える (検算3.1) : 前係数 $4.822877 \times 10^{-5} \text{ V}$ 、分母は 2π 。
3. 立体角が半分になる (観察3.2) : $12.566371 \rightarrow 6.283185$ 。
4. 落ち方が逆を向く (検算3.3) : 点源は 25.0 分の 1、線源は 5.64 倍。
5. 三つの源の点呼 (検算4.1) : $1/r$ 、対数、一定。
6. 4π の条件は三つ (観察4.3) : 点源・三次元・等方。
7. 安静時の到達距離 (検算5.1) : $316.8\mu\text{m}$ 。
8. 最大時の到達距離 (検算5.1) : $44.8\mu\text{m}$ 、実測の 20–80 μm と合う。
9. 縮むのは平方根で (観察6.3) : 需要 50 倍で距離は 7.0711 分の 1。

結び：論文02 が見つけた 4π は、どこにでも出るものではなかった。出るのは点源・三次元・等方の三つが揃ったときだけであり、源の次元を一つ上げるだけで消える。消えたあとに出るのは 2π と対数で、落ち方は逆を向く——同じ距離を離れて、点源は 25.0 分の 1 になり、線源は 5.64 倍になる。そして生体の源はしばしば点ではない。毛細血管は円柱であり、その周りの到達距離は安静時 $316.8\mu\text{m}$ 、最大運動時 $44.8\mu\text{m}$ で、実測の間隔と合うのは後者である。分けるものは一つ——源の次元を書き出すこと。書き出せば、 4π を使ってよい場面と、使うと二倍間違える場面が分かれる。書き出さなければ、離れるほど強くなる場に $1/r$ を当てはめてしまう。

参考文献

1. Plonsey, R. and Barr, R. C. (2007). *Bioelectricity: A Quantitative Approach*, 3rd edition. New York: Springer.
2. Nunez, P. L. and Srinivasan, R. (2006). *Electric Fields of the Brain*, 2nd edition. Oxford: Oxford University Press.
3. Krogh, A. (1919). The Number and Distribution of Capillaries in Muscles. *The Journal of Physiology*, 52(6).
4. Jackson, J. D. (1998). *Classical Electrodynamics*, 3rd edition. New York: Wiley.
5. Crank, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion*, 2nd edition. Oxford: Clarendon Press.
6. Pittman, R. N. (2011). *Regulation of Tissue Oxygenation*. San Rafael: Morgan and Claypool.
7. 山岸勇輝 (2026). 球対称密度分布における $n = 2$ の唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
8. 山岸勇輝 (2026). 4π 質量相殺定理 [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
9. 山岸勇輝 (2026). 境界から内部を読む [論文99]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758790
10. 山岸勇輝 (2026). 割り当てられた領域と、その中の自由 [論文112]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962834
11. 山岸勇輝 (2026). 「不適切」は一語ではない [論文159]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092229

12. 山岸勇輝 (2026). 帰ってこられるかを決めているのは、分母の指数である [論文199]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22108396
13. 山岸勇輝 (2026). 拡散が捕らえる 4π は、場が広がる 4π と同じ根である [論文249]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22160409

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)