

独立性を示す道は二つあり、一方は世界を狭め、他方は広げる

— ゲーデルは選り分け、コーエンは付け加えた — 向きが正反対の二つが、一つの結論のために両方とも要る — [論文259]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

連続体仮説が独立であることは、一つの証明では言えない。本稿が問うのは、なぜ二つ要るのかである——答は、二つの技法の向きが正反対だからである。ゲーデルは既にあるものを選り分けて狭め、コーエンは無かったものを付け加えて広げた。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、狭める側を有限段で数える。構成可能階層の大きさは **0, 1, 2, 4, 16, 65536** と進み、次の段は **2^{65536}** 、**19729** 桁である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。有限段では「選り分ける」と「全部取る」が一致する。別れるのは ω のちょうど一段先で、そこで $\aleph_0$ と $2^{\aleph_0}$ に分かれる（第3節）。第三に、広げる側を実際に走らせた。稠密集合を **48** 個順に満たして条件を **24** 回延ばすと、旧宇宙の **24** 本のどれとも一致しない実数が一本できる——一致した本数は **0** である（第4節）。第四に、向きが正反対である。強制法は毎回一桁足しているだけで、何一つ取り除いていない——旧宇宙はそのまま新宇宙の中に入っている（第4節）。第五に、片方だけでは独立と言えない。ゲーデル **1938** 年とコーエン **1963** 年、**25** 年を隔てた二つが揃って、初めて連続体仮説は独立になる（第5節）。第六に、連続体の濃度は自由ではないが、決まってもいい。cf($2^{\aleph_0}$) > $\aleph_0$ なので $\aleph_\omega$ は禁じられるが、 $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_{17}, \aleph_{\omega+1}$ はどれも許される（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——構成可能宇宙、強制法、連続体仮説の独立性、ケーニヒの定理、イーストンの定理は、いずれも標準的である。集合論を作らない——使うのは一つの累乗と、有限個の稠密集合と、対角線論法だけである。独立性を証明しない——ゲーデルの構成もコーエンの構成も本稿では行わない。二つの向きを並べ、なぜ両方要るのかを書くだけである。不完全性定理を扱わない——論文189が「証明できない」は文の性質ではないことを示し、本文でゲーデルの定理を証明しないと明記している。本稿も同じ線を引き。「構成できない」の別根を数え直さない——論文179と163が扱う。そこでの「構成」は選択公理や存在証明の側であり、本稿の「構成可能」はゲーデルの L である。同じ漢字の別のものであり、混同しない。強制法を正確に定式化しない——第4節が走らせるのは有限個の稠密集合を順に満たす手続きであり、可算個の場合の類似物である。真の強制は本稿の道具では書けない。ZFの無矛盾性を論じない——二つの技法が与えるのは相対無矛盾性だけであり、そのことも本稿の主題の一部である。数値は有限の実演である——第2節は6段、第4節は24本・48個の稠密集合、乱数の種は固定である。既刊との関係：論文189は「証明できない」が文の性質ではなく、公理系との関係であることを示した——本稿はその関係を作る二つの技法の側に回る。論文163は存在定理と構成が別根であることをシャノンとガロアで示した——本稿の二つも存在と構成の対ではなく、構成の向きの対である。論文179は「構成できない」に別根があることを示した——本稿は「構成できる」の側に二つの向きがあることを足す。論文232は同じ等号が四つの別の主張を書いていることを数えた——本稿は同じ「独立」という語が、二つの証明の連言でしか成り立たないことを書く。論文190は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿の第2節も、桁数で書く。加えたのは構成可能階層の有限段を実際に数え、65536とその次の19729桁を出したこと、選り分けと取り尽くしが ω の一段先で別れると位置を特定したこと、稠密集合を満たす手続きを走らせて「付け加える」向きを実演したこと、二つの技法の分離子を三つに数えたこと、許される濃度と禁じられる濃度を並べたことである。

1. 記法と位置づけ

設定：連続体仮説 (CH) は「 $\aleph_0$ と $2^{\aleph_0}$ のあいだに濃度は無い」という主張である。これが ZFC から独立であるとは、CH も $\neg$ CH も証明できないということである。

問い：なぜ証明が二つ要るのか。

答は、向きが正反対だからである。一方は CH が成り立つ世界を作り、他方は成り立たない世界を作る——そして世界の作り方が逆である。

注意：本稿の「構成可能」はゲーデルの L を指す。論文179・163が扱う「構成できる／できない」は存在証明と具体的構成の対比であり、別語である——同じ漢字が二つの別のものを指している。

2. 狭める側：選り分けて作る

設定：構成可能階層は $L_{\alpha+1} = \text{Def}(L_\alpha)$ で作る。**Def** は「式で名指しできる部分集合だけ」を取る——全部の部分集合を取るのではない。

検算 2.1：有限段の大きさを数える。

段 α	$ L_\alpha $
0	0
1	1
2	2
3	4
4	16
5	65536
6	2^{65536} (19729 桁)

観察 2.2

有限段では、名指しできる部分集合が全部の部分集合と一致する。有限集合の部分集合は有限個しかなく、どれも式で書き下せるからである——だから $|L_{\alpha+1}| = 2^{|L_\alpha|}$ になる。

観察 2.3

ここまでは「選り分ける」と「全部取る」の差が一つも見えない。 L が本当に狭いのかどうかは、有限段を眺めていても分からない。

3. 芯：別れるのは ω の一段先である

検算 3.1： ω とその次を並べる。

段	大きさ	何をしたか
L_ω	$\aleph_0$	有限段の合併
$L_{\omega+1}$	$\aleph_0$	名指しできるものだけ取った
$\mathcal{P}(L_\omega)$	$2^{\aleph_0}$	全部の部分集合を取った

観察 3.2

ここで初めて差がつく。式は可算個しかないので、名指しできる部分集合も可算個しかない——一方、部分集合そのものは $2^{\aleph_0}$ 個ある。

観察 3.3

位置が特定できた——選り分けと取り尽くしが別れる最初の段は $\omega + 1$ である。有限段では一致し、 ω でもまだ一致し、その次で別れる。

観察 3.4

L の中では $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ になる。名指しできる実数しか無いので、実数が増えすぎないからである——狭めたことが **CH** を成り立たせている。

4. 広げる側：付け加えて作る

設定：強制法は逆をやる。有限の条件（有限個の桁を決めた文字列）を、稠密集合を順に満たしながら延ばしていく。その合併が新しい実数になる。

検算 4.1：旧宇宙が **24** 本の実数を持っているとする。二種類の稠密集合を交互に満たす—— D_k （長さを k より伸ばす）と E_k （ k 本目と違える）である。

量	値
満たした稠密集合の個数	48
条件を延ばした回数	24
できた実数	101010010110100101101100
旧宇宙の 24 本のうち一致したもの	0 本

観察 4.2

各段で k 桁目を k 本目と違えているので、どの行とも必ず食い違う。旧宇宙の中には無い実数が、一本できた。

観察 4.3

向きに注目する——毎回一桁を足しているだけであり、何一つ取り除いていない。旧宇宙はそのまま新宇宙の中に入っている—— L が選り分けて何も作らないのと、正反対である。

観察 4.4

正直に書くべき点——第4節が走らせたのは有限個の稠密集合を順に満たす手続きであり、対角線論法そのものである。真の強制法は可算個の稠密集合を扱い、一般拡大の存在に議論を要する——本稿は向きを見せるための実演としてこれを使い、強制法を定式化したとは言わない。

5. 片方だけでは独立と言えない

検算 5.1：二つを並べる。

	ゲーデル (1938)	コーエン (1963)
道具	構成可能宇宙 L	強制法・一般拡大
向き	狭める (選り分ける)	広げる (付け加える)
作る世界	$\mathbf{CH}$ が成り立つ	$\mathbf{CH}$ が破れる
示したこと	$\mathbf{Con}(\mathbf{ZF}) \Rightarrow \mathbf{Con}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{GCH})$	$\mathbf{Con}(\mathbf{ZF}) \Rightarrow \mathbf{Con}(\mathbf{ZF} + \neg \mathbf{CH})$

観察 5.2

25 年を隔てている。そしてどちらか一方だけでは「独立」と言えない——ゲーデルだけなら「 $\neg \mathbf{CH}$ は証明できない」、コーエンだけなら「 $\mathbf{CH}$ は証明できない」しか出ない。

観察 5.3

向きが正反対の二つの技法が、一つの結論のために両方とも要る。片方を捨てると、結論が半分になる。

6. 連続体の濃度は自由ではないが、決まってもいいない

検算 6.1：ケーニヒの定理から $\mathbf{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$ である。これで許される値と禁じられる値が分かれる。

$2^{\aleph_0}$ の候補	共終数	可否
$\aleph_1$	$\aleph_1$	許される
$\aleph_2$	$\aleph_2$	許される
$\aleph_{17}$	$\aleph_{17}$	許される
$\aleph_\omega$	$\aleph_0$	禁じられる
$\aleph_{\omega+1}$	$\aleph_{\omega+1}$	許される

観察 6.2

$\aleph_\omega$ だけが落ちる。共終数が $\aleph_0$ だからであり、これは定理が禁じている——独立だからといって何でも入れられるわけではない。

観察 6.3

自由ではないが、決まってもいない。禁じられているのは共終数が可算な基数だけで、残りはどれも一貫している——イーストンの定理が、その残り全部を実際に実現できるという。

7. 三つの分離子

観察 7.1

第一の分離子——絶対性。 L はどのモデルから作っても同じ L が出る。一方、強制拡大は選んだ半順序に依存する——同じ出発点から違う世界が作れる。

観察 7.2

第二の分離子——集合を作るか作らないか。 L は新しい実数を一つも作らない（名指しできるものしか入れない）。強制は新しい実数を作る（第4節）。

観察 7.3

第三の分離子——どちらも相対無矛盾性しか与えない。両方とも「ZF が無矛盾なら」という条件つきである——ZF 自身の無矛盾性は、ZF の中では示せない。ここだけは二つの技法が一致している。

観察 7.4

三つのうち二つで正反対、一つで一致する——だから「同じことを二通りにやった」でも「まったく無関係な二つ」でもない。

8. 点呼と結び

1. 有限段の大きさ（検算2.1）：**0, 1, 2, 4, 16, 65536**、次は **19729** 桁。
2. 有限段では差が出ない（観察2.2）：名指しできる = 全部。
3. 別れるのは $\omega + 1$ （検算3.1）： $\aleph_0$ 対 $2^{\aleph_0}$ 。
4. 狭めたから **CH** が成り立つ（観察3.4）： L の中では $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ 。
5. 付け加える側を走らせた（検算4.1）：**48** 個の稠密集合、**24** 回の延長、一致 **0** 本。
6. 何も取り除いていない（観察4.3）：旧宇宙はそのまま入っている。
7. **25** 年を隔てた二つ（検算5.1）：**1938** と **1963**。
8. 片方では半分（観察5.2）：独立には両方要る。
9. $\aleph_\omega$ だけ禁じられる（検算6.1）：共終数が $\aleph_0$ 。
10. 分離子は三つ（第7節）：絶対性・作るか否か・相対無矛盾性。

結び：「独立である」という一語は、一つの証明の名前ではなかった。二つの証明の連言の名前である——そして二つは、向きが正反対であった。ゲーデルは名指しできるものだけを選び分けて世界を狭め、実数が増えすぎないようにした。コーエンは一桁ずつ付け加えて世界を広げ、旧宇宙に無い実数を作った。狭めた側では $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ になり、広げた側では $\aleph_2$ にも $\aleph_{17}$ にもできる—— $\aleph_\omega$ だけは共終数が禁じている。分けるものは一つ——選り分けているのか、付け加えているのかを書き出すこと。書き出せば、二つが競合ではなく対であることが見える。書き出さなければ、片方だけで「独立を証明した」と言ってしまう。

参考文献

1. Goedel, K. (1938). The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 24(12).
2. Cohen, P. J. (1963). The Independence of the Continuum Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50(6).
3. Cohen, P. J. (1964). The Independence of the Continuum Hypothesis, II. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 51(1).
4. Kunen, K. (2011). *Set Theory*. London: College Publications.
5. Jech, T. (2003). *Set Theory*, 3rd millennium edition. Berlin: Springer.
6. Easton, W. B. (1970). Powers of Regular Cardinals. *Annals of Mathematical Logic*, 1(2).
7. Devlin, K. J. (1984). *Constructibility*. Berlin: Springer.
8. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
9. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419

10. 山岸勇輝 (2026). 「証明できない」は、文の性質ではない [論文189]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105830
11. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
12. 山岸勇輝 (2026). 証明を落とした本から学ぶと、等号の身分も一緒に落ちる [論文232]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22127528

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)