

同値性は定理であり、テーゼは定理ではない

— 三つの別々の出発点と同じクラスに着いたことは証明された — だが「計算できる」との一致は、証明の対象になりえない — [論文260]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

「計算できる」という語には、二つの身分の違う主張がぶら下がっている。本稿が問うのは、そのどちらが証明されたのかである——答は、片方だけである。三つの形式的定義が同じクラスを指すことは定理であり、そのクラスが「計算できるもの全部」だというテーゼは定理ではない。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、出発点を数える。1934–1936年に、動く機械・式の書き換え・再帰という三つの無関係な出発点が置かれた——三つの間の対の同値性は **3** 本である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。その **3** 本はすべて証明されている——形式的定義どうしの比較なので、証明の対象になる（第3節）。第三に、テーゼのほうは対象にならない。片側が非形式的な「計算できる」である以上、等式として書けない——証明できないのではなく、証明という手続きの外にある（第4節）。第四に、それでも反証可能ではある。誰もが計算だと認める手続きで、このクラスの外の関数を一つ出せば倒れる——90年出ていないが、出ない保証は無い（第5節）。第五に、クラスの内側にも階層がある。アッカーマン関数は原始帰納的でないのに計算可能で、 $A(4, 2) = 2^{65536} - 3$ は **19729** 桁である（第6節）。第六に、その階層は数で見える。 $A(4, 0) = 13$ から $A(4, 1) = 65533$ へ **5041** 倍、そこから $A(4, 2)$ へは桁数が **5** から **19729** へ跳ぶ（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——チューリング機械、 λ 計算、一般帰納的関数、それらの同値性、チャーチ=チューリングのテーゼ、アッカーマン関数が原始帰納的でないことは、いずれも標準的である。計算可能性理論を作らない——使うのは一つの再帰的定義と、対の数え上げと、桁数だけである。同値性を証明しない——三本の同値性の証明は本稿では行わない。証明されているという事実と、それが証明の対象になりうる理由だけを書く。テーゼの真偽を判定しない——正しいとも誤りとも言わない。身分が定理ではないと言うだけである。停止問題を扱わない——論文179 が停止問題に触れている。本稿は「計算できない対象」ではなく「計算できるという語の身分」を扱う。計算量に入らない——論文04 は P 対 NP を扱う。複雑性と計算可能性は別の階層であり、本稿は後者だけを見る。アッカーマン関数を完全に評価しない—— $A(4, 2)$ 以降は桁数の式で書くだけであり、値を書き下さない。 $A(4, 3)$ 以降は本稿の道具では扱わない。定義の一覧を網羅しない——第2節に挙げるのは一部であり、同じクラスに至る定式化は他にもある。年号は初出の年であり、同値性の証明年とは別である。既刊との関係：論文163 は「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」が別の文であることを示した——本稿も二つの文の身分の差を扱うが、あちらは存在と構成、こちらは定理とテーゼである。論文189 は「証明できない」が文の性質ではなく公理系との関係だと示した——本稿の第4節はそもそも文になっていない主張を扱う。関係の外側である。論文179 は「構成できない」に別根があることを示した——本稿は「計算できる」の示し方が三つあることを数える。論文232 は同じ等号が四つの別の主張を書いていることを数えた——本稿はテーゼの「=」が、そもそも等号ではないことを書く。論文190 は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿の第6節も桁数で書く。加えたのは三つの定義と三本の同値性を数えて並べたこと、定理とテーゼの分かれ目を「両側が形式的かどうか」の一点に置いたこと、テーゼが証明不能でありながら反証可能であると言ったこと、アッカーマン関数の値を実際に計算し、 $A(4, 2)$ の桁数 19729 を出したことである。

1. 記法と位置づけ

設定：「この関数は計算できる」という文を二つに分ける。

(A) 形式的な主張：三つの形式的定義（機械・書き換え・再帰）が、同じ関数のクラスを指す。

(B) 非形式的な主張：そのクラスが、人が「計算できる」と呼ぶものの全部である。

問い：(A) と (B) は、同じ身分の主張か。

答は、違う。(A) は定理であり証明されている。(B) はテーゼであり、証明の対象になりえない。

注意：本稿は (B) が誤りだとは言わない。身分が定理ではないと言うだけである——正しさと、証明できるかどうかは、別の問いである。

2. 出発点を数える

検算 2.1：三つの出発点を並べる。年は初出のものであり、同値性が示された年とは別である。

定式化	何を動かすか	提唱者	年
一般帰納的関数	再帰の規則	エルブラン、ゲーデル	1934
λ 計算	式の書き換え	チャーチ	1936
チューリング機械	紙の上を動く機械	チューリング	1936

観察 2.2

三つは互いに似ていない。一つは数の上の再帰、一つは記号列の書き換え、一つは物理的な装置の理想化である——同じものが出てくる理由は、定義からは見えない。

検算 2.3：三つの定義のあいだの、対の同値性の本数を数える。

対	同値か
帰納的関数 $\leftrightarrow$ λ 計算	定理
λ 計算 $\leftrightarrow$ チューリング機械	定理
チューリング機械 $\leftrightarrow$ 帰納的関数	定理
合計	3 本

観察 2.4

3 つの定義から作れる対は $\binom{3}{2} = 3$ 本であり、その全部が証明されている。後年これに **register** 機械や型 **0** 文法などが加わったが、どれも同じクラスに落ちた——第2節に挙げたのは一部である。

3. 芯：同値性は定理である

観察 3.1

なぜ証明できるのか。両側が形式的だからである。「チューリング機械で計算できる関数の集合」も「 λ 項で表せる関数の集合」も、定義が書き下されている——だから包含を両向きに示せばよい。

観察 3.2

証明の形も具体的である。一方の対象を他方で模倣する手続きを作ればよい—— λ 項をテープ上に符号化して簡約を機械に実行させる、といった構成である。

観察 3.3

この 3 本が本稿の「定理」の側である。ここまでは、通常の数学と同じ意味で確定している。

4. テーゼは定理ではない

観察 4.1

チャーチ＝チューリングのテーゼは、こう言う——「このクラスが、直観的に計算できる関数の全部である」。右辺の「直観的に計算できる」は、定義が書き下されていない。

検算 4.2：二つの主張を、身分で並べる。

主張	左辺	右辺	身分
同値性	形式的	形式的	定理
テーゼ	形式的	非形式的	定理ではない

観察 4.3

分離子——何を動かすと別物になるか。右辺が形式的かどうか、その一点だけである。左辺は両方とも同じものである。

観察 4.4

「まだ証明されていない」ではない。非形式的な概念との一致は、証明という手続きの入力になりえない——論文232 が同じ等号の四つの身分を数えたのと同じ話で、テーゼの「=」はそもそも等号ではない。

観察 4.5

混同すると何が起きるか。「計算可能性は証明された」と書いてしまう——証明されたのは 3 本の同値性だけであり、テーゼは証明されていない。

5. だが反証可能ではある

観察 5.1

証明できないことと、反証できないことは別である。テーゼを倒すには、誰もが計算だと認める手続きで、このクラスの外の関数を一つ出せばよい。

検算 5.2：何が出れば倒れるかを並べる。

出てきたもの	テーゼは
このクラスの外の関数を、有限の手順で誰でも計算できる	倒れる
このクラスの外の関数を、無限の資源で計算できる	倒れない（手順ではない）
このクラスの中の関数を、新しい方法で計算できる	倒れない（クラスは同じ）
このクラスの外の関数が存在する	倒れない（存在は既知）

観察 5.3

四行のうち、倒すのは一行目だけである。停止問題のように「クラスの外にある関数」は既に知られているが、それは計算できないほうの証拠であってテーゼの反証ではない。

観察 5.4

90 年、一行目は出ていない。だがそれは証拠であって証明ではない——反証可能な主張が長く反証されずにいるとき、それは強い経験的支持であり、定理ではない。

6. クラスの内側にも階層がある

設定：「計算できる」の中は一樣ではない。アッカーマン関数は、原始帰納的でないのに計算可能である——階層が実在することの具体例である。

検算 6.1：定義どおりに評価する。

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$A(0, n)$	1	2	3	4	5
$A(1, n)$	2	3	4	5	6
$A(2, n)$	3	5	7	9	11
$A(3, n)$	5	13	29	61	125

観察 6.2

$A(3, n) = 2^{n+3} - 3$ である——5, 13, 29, 61, 125, 253, ... と、表の四行目がこの式にそのまま乗っている。

検算 6.3： $m = 4$ の行に進む。

	値	桁数
$A(4, 0)$	13	2
$A(4, 1)$	65533	5
$A(4, 2)$	$2^{65536} - 3$	19729

観察 6.4

13 から 65533 へは 5041 倍である。そこから次へは、値の比ではなく桁数が 5 から 19729 へ跳ぶ——倍率で書くことに意味が無くなる。

観察 6.5

この関数はどの原始帰納的関数よりも速く増えるので、原始帰納的ではない。それでも上の表のとおり実際に計算できている——「計算できる」の内側が一層でないことの、動く証拠である。

観察 6.6

正直に書くべき点—— $A(4, 2)$ の値そのものは本稿で書き下していない。桁数の式で書いただけであり、 $A(4, 3)$ 以降は本稿の道具では扱えない。

7. 点呼と結び

1. 出発点は三つ（検算2.1）：1934 の再帰、1936 の書き換え、1936 の機械。
2. 三つは似ていない（観察2.2）：同じものが出る理由は定義から見えない。
3. 同値性は 3 本（検算2.3）： $\binom{3}{2} = 3$ 、その全部が証明されている。
4. 証明できる理由（観察3.1）：両側が形式的だから。
5. テーゼの右辺は非形式的（検算4.2）：だから定理ではない。
6. 分離子は一点（観察4.3）：右辺が形式的かどうか。
7. 反証はできる（検算5.2）：四行のうち倒すのは一行目だけ。
8. 90 年出ていない（観察5.4）：証拠であって証明ではない。
9. $A(3, n) = 2^{n+3} - 3$ （観察6.2）：5, 13, 29, 61, 125。
10. $A(4, 2)$ は 19729 桁（検算6.3）：原始帰納的でないのに計算可能。

結び：1936 年に起きたことは、二つあった。一つは、三つの無関係な出発点が同じクラスに着いたという定理である——対の同値性 3 本は、通常の数学と同じ意味で確定している。もう一つは、そのクラスが「計算できるもの全部」だというテーゼである——こちらは右辺が非形式的なので、証明という手続きの外にある。混同すると「計算可能性は証明された」と書いてしまう。そしてテーゼは、証明できないが反証はできる——90 年反証されていないのは強い証拠であって、定理ではない。分けるものは一つ——両側が形式的かどうかを書き

出すこと。書き出せば、確定している部分と、支持されているだけの部分が分かれる。書き出さなければ、3本の定理の信用が、テーゼの側へ黙って流れ込む。

参考文献

1. Turing, A. M. (1936). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42.
2. Church, A. (1936). An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory. *American Journal of Mathematics*, 58(2).
3. Kleene, S. C. (1936). General Recursive Functions of Natural Numbers. *Mathematische Annalen*, 112.
4. Turing, A. M. (1937). Computability and λ -Definability. *The Journal of Symbolic Logic*, 2(4).
5. Ackermann, W. (1928). Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. *Mathematische Annalen*, 99.
6. Soare, R. I. (2016). *Turing Computability: Theory and Applications*. Berlin: Springer.
7. Odifreddi, P. (1989). *Classical Recursion Theory*. Amsterdam: North-Holland.
8. 山岸勇輝 (2026). 総当たり探索の物理的資源限界 [論文04]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21404131
9. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
10. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419
11. 山岸勇輝 (2026). 「証明できない」は、文の性質ではない [論文189]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105830
12. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
13. 山岸勇輝 (2026). 証明を落とした本から学ぶと、等号の身分も一緒に落ちる [論文232]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22127528

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)