

同じ現象の中に、格子で変わる数と変わらない数が同居している

— 閾値は格子の持ち物で **2.8** 倍ひらく、指数は次元の持ち物で一つも動かない — [論文264]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

論文117と120は、指数が普遍であることを扱った。本稿が問うのは、その普遍性がどこまでかである——答は、同じ現象の中に境目が走っている。パーコレーションでは、閾値は格子ごとに **2.8** 倍ひらくのに、臨界指数は一つも動かない。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、閾値を並べる。三角格子サイトと正方格子ボンドは厳密に $1/2$ 、正方格子サイトは **0.592746**、蜂の巣サイトは **0.6970**、単純立方ボンドは **0.2488** である（第2節）。第二に、閾値はよく動く。最小 **0.2488** から最大 **0.6970** まで **2.8014** 倍ひらく——格子を変えただけで、つながり始める濃度が三倍近く変わる（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。同じ二次元なら、三角でも正方でも蜂の巣でも、 $\beta = 5/36 = \mathbf{0.138889}$ 、 $\nu = 4/3$ で完全に一致する（第3節）。第四に、次元を変えると指数は動く。三次元では $\beta \approx 0.4181$ 、 $\nu \approx 0.8751$ ——格子では動かず、次元でだけ動く（第3節）。第五に、二つの数の役目が違う。閾値はどこで起きるかを決め、指数はどう起きるかを決めている（第4節）。第六に、六次元より上では止まる。 $d \geq 6$ で $\beta = 1$ 、 $\nu = 1/2$ に固定される——次元でだけ動いていた数が、そこで動くのをやめる（第5節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——三角格子サイトと正方格子ボンドの閾値が厳密に $1/2$ であること、二次元の指数が $\beta = 5/36$ 、 $\nu = 4/3$ であること、上部臨界次元が 6 であること、普遍性という考え方は、いずれも標準的である。パーコレーションの理論を作らない——使うのは文献値の一覧と、比の計算だけである。閾値を計算しない——数値的な閾値 (0.592746 など) は引用値であり、本稿で求めたものではない。指数を計算しない——二次元の厳密値も三次元の数値も引用値である。普遍性を証明しない——なぜ格子に依らないのかは扱わない。依らないという事実を、依る量と並べて置くだけである。くりこみ群に立ち入らない——論文117と120が扱う。相転移の一般論を作らない——臨界点 20 件 (08・117・120・203~205・209・212) は相転移の臨界性を扱っており、本稿はつながりの閾値を扱う。三次元の値の精度を主張しない—— 0.4181 も 0.8751 も数値計算による推定であり、桁が確定しているとは言わない。既刊との関係：論文117はスケール不変性が四通りに指数を選ぶことを分け、II 群がちょうど一つという条件を書いた——本稿はその指数が普遍である側に立ち、同じ現象の中で普遍でない量と並べる。論文120は次元解析が二通りに破れることを示した——あちらは破れ方の分類、本稿は破れない量と破れる量の同居である。論文94は「次元」が一つではないことを示した——本稿の「次元」は空間の次元であり、フラクタル次元ではない。論文201は「完備」が四つの別の主張であることを数えた——本稿は一つの現象を二つの持ち物に分ける。論文190は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿は逆に、動かない桁を並べる。加えたのは閾値の広がりをも 2.8014 倍という具体的な数で出したこと、同じ次元の三つの格子で指数が完全に一致することを並べたこと、「どこで」と「どう」という二つの役目に分けたこと、上部臨界次元で指数が動くのをやめると書いたことである。

1. 記法と位置づけ

設定：格子の各点（サイト）または各辺（ボンド）を、確率 p で「通れる」ことにする。 p を上げていくと、あるところで無限に広がる連結成分が現れる——その p を閾値 p_c という。

受け取るもの：論文117と120は、臨界指数が普遍であることを扱った。本稿はそれを前提として受け取る——なぜ普遍なのかは扱わない。

問い：その普遍性は、どこまで届いているのか。

答は、同じ現象の中に境目が走っている。閾値は格子の持ち物で、指数は次元の持ち物である。

2. 閾値は格子ごとに動く

検算 2.1：文献値を並べる。

格子	種類	p_c
二次元 三角	サイト	1/2 （厳密）
二次元 正方	ボンド	1/2 （厳密）
二次元 正方	サイト	0.592746
二次元 蜂の巣	サイト	0.6970
三次元 単純立方	ボンド	0.2488
三次元 単純立方	サイト	0.3116

観察 2.2

最小 **0.2488**、最大 **0.6970**、比は **2.8014** 倍である。同じ「パーコレーション」という現象なのに、始まる濃度が三倍近く違う。

観察 2.3

二次元の中だけで見ても 1/2 から **0.6970** まで動く。次元を変えなくても動く——閾値は格子の細部を見ている。

観察 2.4

正直に書くべき点——**0.592746** や **0.3116** は数値計算による値であり、厳密値が知られているのは 1/2 の二行だけである。本稿はこれらを引用しており、自分で求めているはない。

3. 芯：指数は格子を見ていない

設定：閾値の近くでは、無限クラスターに属する確率が $P_\infty \sim (p - p_c)^\beta$ 、相関長が $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$ で振る舞う。この β と ν を臨界指数という。

検算 3.1：同じ二次元の三つの格子で並べる。

格子	p_c	β	ν
三角 サイト	0.5	0.138889	1.333333
正方 サイト	0.592746	0.138889	1.333333
蜂の巣 サイト	0.6970	0.138889	1.333333

観察 3.2

左から二列目は 0.5 から 0.6970 まで **1.394** 倍動いている。右の二列は一桁も動いていない—— $\beta = 5/36$ 、 $\nu = 4/3$ で、三つとも同じ分数である。

検算 3.3：次元を変える。

次元 d	β	ν
2	$5/36 = 0.138889$	$4/3 = 1.333333$
3	≈ 0.4181	≈ 0.8751
6 以上	1	$1/2$

観察 3.4

格子を変えても動かなかった数が、次元を変えると動く。 β は 0.138889 から 0.4181 へ **3.01** 倍になる——閾値とは見ているものが違う。

観察 3.5

分離子——何を動かすとどちらが動くか。格子を動かすと閾値だけが動き、次元を動かすと指数だけが動く。二つの旋回軸が直交している。

4. 二つの数の役目が違う

検算 4.1：二つを役目で分ける。

量	何を決めるか	格子で動くか	次元で動くか
閾値 p_c	どこで起きるか	動く（2.8014 倍）	動く
指数 β, ν	どう起きるか	動かない	動く

観察 4.2

閾値は「いつ始まるか」を、指数は「始まったあとどう立ち上がるか」を決めている。同じ現象の中に、細部を見ている量と、見ていない量が同居している。

観察 4.3

実務への含意——閾値を知りたいければ格子を正確に指定せねばならず、指数を知りたいければ次元だけ言えばよい。どちらを測っているのかで、必要な情報の量が違う。

5. 六次元より上では、指数も動くのをやめる

検算 5.1：次元を上げていく。

次元 d	β	状態
2	0.138889	次元ごとに違う
3	≈ 0.4181	次元ごとに違う
6	1	上部臨界次元
7	1	もう動かない
100	1	もう動かない

観察 5.2

$d \geq 6$ では平均場の値に固定される。閾値は依然として格子ごとに動くのに、指数は次元にも依らなくなる——普遍性の階段が、そこでもう一段上がる。

観察 5.3

三段になっている——閾値は格子ごと、指数は $d < 6$ で次元ごと、 $d \geq 6$ で完全に一つ。同じ一つの現象の中に、細部への依存度が三段階ある。

6. 点呼と結び

1. 閾値の一覧（検算2.1）： $1/2$ 、**0.592746**、**0.6970**、**0.2488**、**0.3116**。
2. 閾値は **2.8014** 倍ひらく（観察2.2）：**0.2488** から **0.6970**。
3. 二次元の中だけでも動く（観察2.3）： $1/2$ から **0.6970**。
4. 指数は三つの格子で完全一致（検算3.1）：**0.138889** と **1.333333**。
5. 閾値は **1.394** 倍動いている（観察3.2）：同じ表の中で。
6. 次元を変えると指数が動く（検算3.3）： β が **3.01** 倍。
7. 巡回軸が直交している（観察3.5）：格子は閾値、次元は指数。
8. 役目が違う（検算4.1）：どこでと、どう。
9. 六次元で止まる（検算5.1）： $\beta = 1$ 、 $\nu = 1/2$ に固定。
10. 依存度は三段（観察5.3）：格子ごと、次元ごと、完全に一つ。

結び：論文117 と120 が扱った普遍性は、現象まるごとの性質ではなかった。同じパーコレーションという現象の中に、境目が走っている——閾値は格子の持ち物で、単純立方ボンドの **0.2488** から蜂の巣サイトの **0.6970** までは **2.8014** 倍ひらく。一方、臨界指数は次元の持ち物で、三角でも正方でも蜂の巣でも $\beta = 5/36$ 、 $\nu = 4/3$ から一桁も動かない。そして六次元より上では、指数は次元にも依らなくなる——細部への依存度が三段になっている。分けるものは一つ——どの量が、何の持ち物なのかを書き出すこと。書き出せば、格子を正確に指定すべき場面と、次元だけ言えばよい場面が分かれる。書き出さなければ、**0.2488** と **0.6970** を同じ数の測定誤差だと読んでしまう。

参考文献

1. Broadbent, S. R. and Hammersley, J. M. (1957). Percolation Processes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53(3).
2. Stauffer, D. and Aharony, A. (1994). *Introduction to Percolation Theory*, 2nd edition. London: Taylor and Francis.
3. Grimmett, G. (1999). *Percolation*, 2nd edition. Berlin: Springer.

4. Kesten, H. (1980). The Critical Probability of Bond Percolation on the Square Lattice Equals $1/2$. *Communications in Mathematical Physics*, 74(1).
5. den Nijs, M. P. M. (1979). A Relation between the Temperature Exponents of the Eight-Vertex and q-State Potts Model. *Journal of Physics A*, 12(10).
6. Wang, J., Zhou, Z., Zhang, W., Garoni, T. M. and Deng, Y. (2013). Bond and Site Percolation in Three Dimensions. *Physical Review E*, 87(5).
7. 山岸勇輝 (2026). 「次元」は一つではない [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
8. 山岸勇輝 (2026). スケール不変性は、四通りに指数を選ぶ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
9. 山岸勇輝 (2026). 次元解析は、二通りに破れる [論文120]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22036433
10. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
11. 山岸勇輝 (2026). 「完備」は四つの別の主張である [論文201]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22109052

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)