

低温比熱で二つの模型を分けたのは、量子化ではなく状態密度である — どちらも同じだけ量子化している — 違いは $g(\omega)$ 一つで、 T^3 の 3 は空間の次元である — [論文 265]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

アインシュタイン（1907）とデバイ（1912）は、低温の比熱でまったく違う答を出す。本稿が問うのは、何が二人を分けたのかである——答は、量子化ではない。どちらも振動子を同じだけ量子化しており、違うのは状態密度 $g(\omega)$ だけである。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、低温でどれだけ違うかを数える。 $T/\theta = 0.05$ でデバイは 9.740757×10^{-3} 、アインシュタインは 8.244615×10^{-7} ——比は **11814.7** 倍である（第3節）。第二に、高温では区別がつかない。 $T/\theta = 1.00$ では **0.951732** と **0.920674** で、比は **1.0**——低温でだけ別れる（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。ずれ方の形が違う。デバイは冪、アインシュタインは指数関数である——同じ測り方をアインシュタインに当てると「指数 **34.067**」という無意味な値が出る（第4節）。第四に、 T^3 の 3 は次元である。 d 次元で解いて低温の指数を測ると、**1.000137**、**2.000000**、**3.000000**、**3.999998** と出る——指数がそのまま次元である（第5節）。第五に、その次元は状態密度から来ている。 $g(\omega) \propto \omega^{d-1}$ だから $C \propto T^d$ になる——量子化の式には d が一度も現れない（第5節）。第六に、その状態密度に 4π が座っている。 k 空間の球面から $g(\omega) \propto 4\pi k^2$ が出る—— $4\pi = \mathbf{12.566371}$ は球の立体角そのものである（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——アインシュタイン模型、デバイ模型、低温での T^3 則、状態密度の導出は、いずれも標準的である。固体物理を作らない——使うのは二つの積分と、対数比による指数の測定だけである。格子力学を扱わない——分散関係を線形とだけ置き、実際のフォノン分散も、光学枝も、非調和項も扱わない。どちらの模型が正しいとも言わない——デバイのほうが実測に近いという事実は引くが、どちらも近似であって、本稿はその優劣を主題にしない。電子比熱を扱わない——金属の低温比熱には T に比例する電子の寄与があるが、本稿は格子の寄与だけを見る。デバイ温度の値を主張しない——すべて T/θ という比で書いており、特定の物質の θ を使っていない。数値は離散化されている——積分は台形則で刻み 40000、比較は $T/\theta = 0.02$ と 0.04 の二点である。デバイ長と混同しない——既刊のデバイ 10 件はプラズマのデバイ長 (論文22・52・54) であり、本稿の格子のデバイ模型とは別物である。同じ人名の別の仕事である。ブロッホ球・ブリルアンとも混同しない——既刊の「ブロッホ」19 件は量子ビットのブロッホ球、「ブリルアン」は波動伝播と観測の代価であって、いずれも結晶の話ではない。既刊との関係：論文02 は逆二乗場に純粋立体角 4π が現れることを示した——本稿の第6節は、同じ 4π が状態密度の中にも座っていることを書く。論文258 は 4π が出る条件を三つに書き出した——本節はその条件を満たす場所 (球・三次元・等方) である。論文117 と 120 は指数がどう決まるかを扱った——本稿は一つの指数の正体が空間の次元だった場合を数で出す。論文144 は指数を、何が保存しているかの署名として読んだ——本稿の署名は次元である。論文190 は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿も指数を対数比で測る。加えたのは低温で二つの模型が 11814.7 倍ずれることを計算したこと、冪と指数関数の違いを「同じ測り方を当てると無意味な値が出る」という形で見せたこと、 d 次元で解いて指数が 1.000137 から 3.999998 まで次元に一致することを確かめたこと、その次元が状態密度から来ており、量子化の式には現れないと書いたことである。

1. 記法と位置づけ

設定：固体の格子比熱を、二つの模型で計算する。どちらも振動子のエネルギーを $\hbar\omega$ の整数倍に量子化する——そこは共通である。

模型	量子化するか	状態密度 $g(\omega)$
アインシュタイン (1907)	する	すべて同じ ω (デルタ関数)
デバイ (1912)	する	線形分散から $\propto \omega^2$

問い：では、二人を分けたのは何か。

答は、状態密度だけである。量子化は同じで、 $g(\omega)$ の一行だけが違う。

注意：本稿の「デバイ」は格子のデバイ模型である。既刊に 10 件あるデバイはプラズマのデバイ長であり、同じ人名の別の仕事である——混同しない。

2. 高温では区別がつかない

設定：以下、比熱は $C/(3Nk)$ で書く。高温極限で 1 に近づく形である（デュロン＝プティ）。

検算 2.1： T/θ を下げていく。

T/θ	デバイ	アインシュタイン	比
1.00	0.951732	0.920674	1.0
0.50	0.825408	0.724062	1.1
0.20	0.368635	0.170742	2.2
0.10	7.582100×10^{-2}	4.540405×10^{-3}	16.7
0.05	9.740757×10^{-3}	8.244615×10^{-7}	11814.7

観察 2.2

高温では二つの模型が同じ答を出す。 $T/\theta = 1.00$ で 0.951732 と 0.920674、差は 3% ほどである——ここで二人を区別することはできない。

観察 2.3

T/θ を 20 分の 1 にすると、比が 1.0 から 11814.7 まで開く。低温でだけ別れる——模型の差は温度によって見えたり見えなかったりする。

3. 芯：ずれ方の形が違う

設定：低温で二つがどう振る舞うかを、形で見る。デバイは冪 T^3 、アインシュタインは指数関数 $\exp(-\theta/T)$ である。

検算 3.1： $T/\theta = 0.02$ と 0.04 の二点を取り、対数比で「指数」を測る。

模型	$T/\theta = 0.02$	$T/\theta = 0.04$	測った指数
デバイ（三次元）	2.078061×10^{-4}	1.662448×10^{-3}	3.000000
アインシュタイン	4.821875×10^{-19}	8.679965×10^{-9}	34.067

観察 3.2

デバイは **3.000000** ときれいに出る——冪則だからである。アインシュタインは **34.067** という意味のない値が出る——冪則ではないので、指数を測るという操作自体が当てはまらない。

観察 3.3

34.067 は測り方が間違っているという印である。別の二点をとれば別の値が出る—— $\exp(-\theta/T)$ は $\exp(-50) = 1.93 \times 10^{-22}$ から $\exp(-25) = 1.39 \times 10^{-11}$ へ動いており、比が温度に依存する。

観察 3.4

分離子——何を動かすと別物になるか。状態密度が $\omega = 0$ の近くに状態を持つかどうかである。デバイは持つので、いくら冷やしても励起できる低い振動が残り、冪で落ちる。アインシュタインは持たないので、 $\hbar\omega$ より下では何も励起できず、指数関数で落ちる。

4. T^3 の 3 は、空間の次元である

設定：デバイ模型を d 次元で解く。線形分散のままで、状態密度だけが $g(\omega) \propto \omega^{d-1}$ に変わる。

検算 4.1：同じ二点で指数を測る。

次元 d	$T/\theta = 0.02$	$T/\theta = 0.04$	測った指数
1	6.578486×10^{-2}	1.315822×10^{-1}	1.000137
2	2.884937×10^{-3}	1.153975×10^{-2}	2.000000
3	2.078061×10^{-4}	1.662448×10^{-3}	3.000000
4	1.990901×10^{-5}	3.185438×10^{-4}	3.999998

観察 4.2

測った指数が、そのまま次元と一致する。**1.000137**、**2.000000**、**3.000000**、**3.999998**—— T^3 の 3 は空間の次元である。

観察 4.3

ここが本稿の一番の点である。量子化の式（プランク分布）には d が一度も現れない—— d が入ってくるのは状態密度からだけである。だから「 T^3 は量子効果だ」という言い方は、半分しか言っていない。

観察 4.4

正直に書くべき点—— $d = 1$ で **1.000137** とわずかにずれるのは、 $T/\theta = 0.02$ がまだ十分低温でないためである。数値の限界であって、法則の破れではない。

5. その状態密度に、 4π が座っている

設定：三次元の k 空間で、半径 k 以内の状態数を数える。

$$N(< k) = V \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi k^3}{(2\pi)^3}, \quad g(\omega) d\omega = 3V \cdot \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}$$

検算 5.1：この式に立っている定数を読む。

定数	値	由来
4π	12.566371	球の全立体角
$\frac{4}{3}\pi$	4.188790	球の体積
$(2\pi)^3$	248.050213	一状態あたりの k 空間の体積
3	3	偏極の数（縦 1 + 横 2 ）

観察 5.2

4π が状態密度の中に立っている。論文02 が逆二乗場で見た 4π と同じものである——どちらも球の全立体角であり、別根ではない。

観察 5.3

論文258 は 4π が出る条件を点源・三次元・等方の三つに書き出した。ここはその三つが揃っている—— k 空間の原点から等方に、三次元の球面を数えている。

観察 5.4

そして d 次元では 4π が別の立体角に変わり、 k^2 が k^{d-1} に変わる。そこから $g(\omega) \propto \omega^{d-1}$ 、そして $C \propto T^d$ が出る——第4節で測った指数の出どころが、この一行である。

6. 点呼と結び

1. どちらも量子化している（第1節）：共通点は量子化のほう。
2. 高温では同じ（検算2.1）：**0.951732** と **0.920674**、比 **1.0**。
3. 低温で **11814.7** 倍（検算2.1）： $T/\theta = 0.05$ で。
4. 形が違う（検算3.1）：デバイは冪、アインシュタインは指数関数。
5. **34.067** は無意味（観察3.2）：冪則でないものに指数を測った印。
6. 分離子は $\omega = 0$ の近く（観察3.4）：低い振動が残るかどうか。
7. 指数は次元と一致（検算4.1）：**1.000137**、**2.000000**、**3.000000**、**3.999998**。

8. 量子化の式に d は無い (観察4.3) : d は状態密度から入る。
9. 4π が状態密度に座る (検算5.1) : **12.566371**、球の全立体角。
10. 論文02 と同根 (観察5.2) : 別根ではない。

結び : アインシュタインとデバイを分けたのは、量子化ではなかった。二人とも同じだけ量子化しており、違うのは状態密度 $g(\omega)$ の一行だけである。その一行が、低温で **11814.7** 倍の差を作り、ずれ方の形まで変える——デバイは冪で落ち、アインシュタインは指数関数で落ちるので、同じ測り方を当てると **34.067** という無意味な値が返る。そして T^3 の **3** は、 d 次元で解いて測れば **1.000137**、**2.000000**、**3.000000**、**3.999998** と出る——空間の次元そのものである。その次元は量子化の式には一度も現れず、状態密度からだけ入ってくる。そしてその状態密度には $4\pi = 12.566371$ が座っており、論文02 が見た立体角と同じものである。分けるものは一つ——どの一行が違うのかを書き出すこと。書き出せば、量子化のせいにしてよい部分と、幾何のせいにすべき部分が分かれる。書き出さなければ、 T^3 の **3** を量子力学の手柄にしてしまう。

参考文献

1. Einstein, A. (1907). Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Waerme. *Annalen der Physik*, 327(1).
2. Debye, P. (1912). Zur Theorie der spezifischen Waermen. *Annalen der Physik*, 344(14).
3. Ashcroft, N. W. and Mermin, N. D. (1976). *Solid State Physics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
4. Kittel, C. (2005). *Introduction to Solid State Physics*, 8th edition. New York: Wiley.
5. Born, M. and Huang, K. (1954). *Dynamical Theory of Crystal Lattices*. Oxford: Clarendon Press.
6. Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1980). *Statistical Physics, Part I*, 3rd edition. Oxford: Butterworth-Heinemann.
7. 山岸勇輝 (2026). 4π 質量相殺定理 [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
8. 山岸勇輝 (2026). スケール不変性は、四通りに指数を選ぶ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
9. 山岸勇輝 (2026). 次元解析は、二通りに破れる [論文120]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22036433
10. 山岸勇輝 (2026). 指数は、何が保存しているかの署名である [論文144]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082585
11. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
12. 山岸勇輝 (2026). 4π が出るのは、源が点のときだけである [論文258]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169011

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)