

標本化定理は正しく、その前提は決して満たされない

—— 帯域制限された有限時間の信号は存在しない —— 同じ標本を作る入力が無限にあり、標本の側にはどれだったかの情報が無い —— [論文266]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

標本化定理は定理である。本稿が問うのは、その前提が満たされることがあるのかである——答は、決してない。「帯域制限されている」という前提は、有限の時間しか続かない信号とは両立しない。定理が正しいことと、使えることは別である。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、折り返しを数える。標本化周波数 **1000 Hz** のとき、**100 Hz** と **900 Hz** と **1100 Hz** はすべて **100 Hz** に見える（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。同じ標本を作る入力は三つではなく、無限にある。

100, 900, 1100, 1900, 2100, 2900, 3100, 3900, ... と際限なく続く（第3節）。第三に、標本の側に情報が無い。どれだったかを決めるのは標本ではなく、帯域制限という前提のほうである（第3節）。第四に、その前提が満たされない。帯域制限された信号は指数型の整関数になり、どの区間の上でも恒等的に **0** になれない——有限時間で終わる信号は帯域制限されえない（第4節）。第五に、ここにも **4π** が座っている。時間と帯域の不確定性は **$\sigma_t \sigma_f \geq 1/(4\pi) = 0.079577$** である—— **$\sigma_t = 1$ ms** なら **$\sigma_f \geq 79.5775$ Hz**（第5節）。第六に、圧縮センシングは緩和ではない。帯域制限の代わりにスパース性という別の前提を置いている——前提の置き換えであって、前提を外したのではない（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——標本化定理、折り返し、ペイリー＝ウィーナーの定理、時間帯域の不確定性関係は、いずれも標準的である。信号処理を作らない——使うのは一つの剰余演算と、一つの不等式だけである。標本化定理を否定しない——定理は正しい。本稿が問うのは前提が満たされるかであって、定理の当否ではない。ペイリー＝ウィーナーの定理を証明しない——帯域制限が指数型の整関数を意味することを引くだけである。実務の対策を論じない——反折り返しフィルタも、窓関数も、オーバーサンプリングも扱わない。どれも前提を近似で満たしにいく手続きであり、本稿はその手前で止まる。圧縮センシングを扱わない——論文188が「未知数より少ない測定で厳密に決まる」を扱う。本稿は前提が置き換わったという一点だけを書き、復元の条件に立ち入らない。熱雑音のナイキストと混同しない——論文78のNyquistはジョンソン＝ナイキストの熱雑音であり、同じ人名の別の仕事である。「和で抑えられる」の標本化と混同しない——論文243に標本化が1件あるが、別の文脈である。デルタ関数の扱いに立ち入らない——論文178がデルタは写像であることを示した。本稿は標本化を掛け算としてしか使わない。既刊との関係：論文02は逆二乗場に純粋立体角 4π が現れることを示した——本稿の第5節は、同じ 4π が不確定性関係の分母にも立っていることを書く。論文258は 4π が出る条件を三つに書き出し、論文265は状態密度の中の 4π を見た——本稿はその族に時間と周波数の対を足す。論文188は未知数より少ない測定で厳密に決まることを示した——本稿はその前提が別のものに置き換わっていると書くだけである。論文201は「完備」が四つの別の主張であることを数えた——本稿は「正しい定理」と「使える定理」が別だと分ける。論文190は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿は無限個を数え上げる。加えたのは同じ標本を作る入力が無限族をなすことを具体的に列挙したこと、前提が満たされない理由をペイリー＝ウィーナーから一行で書いたこと、不確定性の分母の 4π を既刊の 4π の族に接続したことで、圧縮センシングが前提の置き換えであって緩和ではないと書いたことである。

1. 記法と位置づけ

設定：連続な信号を、一定の間隔で標本化する。標本化周波数を f_s 、その半分 $f_s/2$ をナイキスト周波数という。

標本化定理：信号が $f_s/2$ より上の成分を持たない（帯域制限されている）なら、標本から元の信号が完全に復元できる。

問い：その前提は、満たされることがあるのか。

答は、決していない。定理は正しい——だが前提のほうが、現実の信号と両立しない。

2. 折り返しを数える

検算 2.1 : $f_s = 1000$ Hz、ナイキスト周波数 500 Hz とする。

入力の周波数	標本に見える周波数
100 Hz	100 Hz
400 Hz	400 Hz
500 Hz	500 Hz
600 Hz	400 Hz
900 Hz	100 Hz
1100 Hz	100 Hz

観察 2.2

600 Hz は 400 Hz に見える。900 Hz と 1100 Hz は、どちらも 100 Hz に見える——標本を見ただけでは区別がつかない。

3. 芯：同じ標本を作る入力は無数にある

検算 3.1：100 Hz に見える入力を、上へ数え上げる。

入力の周波数	標本に見える周波数
100	100
900	100
1100	100
1900	100
2100	100
2900	100
3100	100
3900	100
⋮	際限なく続く

観察 3.2

候補は三つではなく、 $kf_s \pm 100$ という無限族である。どこまで上がっても同じ標本を作る入力が見つかる。

観察 3.3

標本の側には、どれだったかの情報が一切無い。選んでいるのは標本ではなく、「500 Hz より上は無い」という前提のほうである——復元しているのは測定ではなく、仮定である。

観察 3.4

分離子——何を動かすと復元できなくなるか。帯域制限という前提を外すことである。標本の数も、精度も、計算力も、一つも動かしていない。

4. その前提は、決して満たされない

観察 4.1

帯域制限された信号は、フーリエ変換が有界な台を持つ。ペイリー＝ウィーナーの定理により、そのような信号は指数型の整関数になる。

観察 4.2

整関数は、どの区間の上でも恒等的に 0 にはなれない（零点が集積すれば全体が 0 になる）。つまり有限の時間で始まり、有限の時間で終わる信号は、帯域制限されえない。

検算 4.3：現実の信号を並べて、どちらの側に立つかを見る。

信号	時間	帯域
理想の正弦波	無限に続く	帯域制限される
録音した一音	有限	帯域制限されない
一回の打撃	有限	帯域制限されない
測定データ	有限	帯域制限されない

観察 4.4

実際に測るものは、すべて有限時間である。したがって前提を満たすものは一つも無い——定理は正しく、条件を満たす対象が現実に存在しない。

観察 4.5

これは定理の欠陥ではない。定理が正しいことと、適用できることは別の問いである——実務は反折り返しフィルタで前提を近似的に満たしにいくが、それは別の話であり本稿は立ち入らない。

5. 不確定性の分母にも、 4π が座っている

設定：時間の広がり σ_t と周波数の広がり σ_f には

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}$$

という下限がある（等号はガウス波束のときだけ）。

検算 5.1： $1/(4\pi) = 0.079577$ である。

σ_t	σ_f の下限
1 ms	79.5775 Hz
100 μ s	795.7747 Hz
1 μ s	79577.4715 Hz

観察 5.2

時間を短く切るほど、帯域が広がる。1 ms に閉じ込めるだけで 79.5775 Hz 以上の広がりが出ると必ず出る——第4節の定性的な話が、数になっている。

観察 5.3

分母の $4\pi = 12.566371$ は、論文02 が逆二乗場で見たと同じ立体角である。論文258 はそれが出る条件を三つに書き、論文265 は状態密度の中に見た——本節が足すのは時間と周波数という対である。

観察 5.4

正直に書くべき点—— $1/(4\pi)$ という形は、 σ を標準偏差で、周波数を Hz で測ったときの値である。角周波数で書けば $1/2$ になる—— 4π は単位の選び方に依存して現れるのであって、それ自体が発見ではない。

6. 圧縮センシングは、前提の置き換えである

観察 6.1

圧縮センシングは「ナイキストより少ない標本で復元できる」と言われる。これを定理が緩んだと読むのは誤りである。

検算 6.2：二つを、置いている前提で並べる。

	置く前提	何が復元を決めるか
標本化定理	帯域制限	帯域の上限
圧縮センシング	スパース性	非零成分の個数

観察 6.3

前提が外れたのではなく、別のものに入れ替わった。どちらも「標本の外にある情報」を必要としており、その情報の種類が違うだけである。

観察 6.4

論文188 は未知数より少ない測定で厳密に決まることを扱った——本稿が足すのは、そこで前提が交代しているという一点である。復元の条件そのものには立ち入らない。

7. 点呼と結び

1. 折り返しが起きる（検算2.1）：**900 も 1100 も 100 Hz** に見える。
2. 候補は無限族（検算3.1）： **$kf_s \pm 100$** が際限なく続く。
3. 標本に情報が無い（観察3.3）：選んでいるのは前提のほう。
4. 帯域制限は整関数を意味する（観察4.1）：ペイリー＝ウィーナー。
5. 整関数は区間で **0** になれない（観察4.2）：有限時間と両立しない。
6. 測るものはすべて有限時間（検算4.3）：前提を満たすものが無い。

7. 不確定性の下限（検算5.1）： $1/(4\pi) = 0.079577$ 、1 ms で 79.5775 Hz。

8. 4π は単位に依存する（観察5.4）：角周波数なら $1/2$ 。

9. 圧縮センシングは置き換え（検算6.2）：帯域制限からスパース性へ。

結び：標本化定理は正しい。そして、その前提を満たす信号は一つも存在しない。帯域制限されていれば指数型の整関数になり、どの区間の上でも 0 になれない——有限の時間で終わる信号は、原理的に帯域制限されえない。標本の側には、100 Hz だったのか 900 Hz だったのか 1100 Hz だったのかを決める情報が一切無い。選んでいるのは測定ではなく、満たされていない前提である。そして圧縮センシングは、その前提を外したのではなく別のものに入れ替えた。分けるものは一つ——定理が正しいことと、前提が満たされることを、別々に書き出すこと。書き出せば、定理を疑うべき場面と、前提を疑うべき場面が分かれる。書き出さなければ、無限にある候補の中から前提が一つ選んだ答を、測定が決めたと読んでしまう。

参考文献

1. Shannon, C. E. (1949). Communication in the Presence of Noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1).
 2. Whittaker, E. T. (1915). On the Functions Which Are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 35.
 3. Paley, R. E. A. C. and Wiener, N. (1934). *Fourier Transforms in the Complex Domain*. Providence: American Mathematical Society.
 4. Slepian, D. (1976). On Bandwidth. *Proceedings of the IEEE*, 64(3).
 5. Gabor, D. (1946). Theory of Communication. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, 93(26).
 6. Unser, M. (2000). Sampling—50 Years after Shannon. *Proceedings of the IEEE*, 88(4).
 7. 山岸勇輝 (2026). 4π 質量相殺定理 [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
 8. 山岸勇輝 (2026). 摩擦と散逸は粗視化である [論文78]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21731937
 9. 山岸勇輝 (2026). デルタは関数ではなく、写像である [論文178]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098261
 10. 山岸勇輝 (2026). 未知数より少ない測定で、厳密に決まる [論文188]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105691
 11. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
 12. 山岸勇輝 (2026). 「完備」は四つの別の主張である [論文201]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22109052
 13. 山岸勇輝 (2026). 「和で抑えられる」は一つの性質ではない [論文243]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22159642
 14. 山岸勇輝 (2026). 4π が出るのは、源が点のときだけである [論文258]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169011
 15. 山岸勇輝 (2026). 低温比熱で二つの模型を分けたのは、量子化ではなく状態密度である [論文265]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169749
-

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)