

「曲率を測った」は、どの多様体の話か

— ガウスの三角形が見たのは地表であって空間ではない — [論文27]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

ガウスが測地測量で三角形の内角の和を測り、空間が平坦かどうかを試したのだ——という語りが広く流通している。本稿は歴史上の意図を判定しない。判定するのは数である。新しい数学も物理も主張しない。第一に、厳密な言明はガウス＝ボンネである。測地線三角形について内角の和から π を引いたものは、 K の面積分に等しい。単位球の八分の一で両辺が $\pi/2$ で一致する（本稿で確認）（第2節）。第二に、その三角形は確かに曲率を測っている。三辺を **69,85,107 km** とするとヘロンの公式で面積は **2929.43 km²**、地球半径 **6371 km** に対する球面過剰は **14.8865 秒角** である（本稿で計算）。十九世紀の器械で十分に見える量である（第3節）。第三に、ブレーキ。それは地表の曲率であって、空間の曲率ではない。地球まわりの空間切断の曲率は $|K| \sim (GM/c^2)/r^3 = 1.71503 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2}$ 、同じ三角形での角欠損は 1.03628×10^{-8} 秒角にすぎない。二つは九桁違う（本稿で計算）（第4節）。第四に、宇宙論的曲率ならさらに三十一桁下である（ 6.042×10^{-40} 秒角）。そして仮に完璧な零結果を **0.01 秒角** で得たとしても、それが与える曲率半径の下限は地球半径の **38.58 倍** ではない——空間の幾何の検査としては、この三角形は小さすぎる（第5節）。第五に、最も鋭い柵は精度ですらない。測量の水平角は手続きの一部として基準面へ帰化される。したがって測られている対象は、空間についての問いが立つより前に、構成上すでに「その面の上の三角形」である（第6節）。分離子は「どの多様体に三角形が載っているか」である（第7節）。

本稿の射程：新しい数学定理も新しい物理法則も主張しない。ガウス＝ボンネ、球面過剰、シュヴァルツシルト空間切断の曲率はいずれも標準的である。歴史上ガウスが何を意図したかについては、本稿は何も判定しない——資料の解釈は歴史家の仕事であり、本稿が扱うのはその語りが数として成立するだけである。加えたのは四つの「曲率」に住所と桁を書いたこと、零結果が与える下限を実際に計算したこと、最も鋭い柵が精度でなく帰化の手続きにあると書いたことである。

1. 記法と位置づけ

曲面のガウス曲率を K 、球面の半径を R 、三角形の面積を A と書く。秒角はラジアンで $\pi/(180 \times 3600)$ である。

位置づけ：論文91 は内在的曲率（驚異の定理）を扱い、論文128 はポアンカレ＝ホップの向きを一方向に限った。本稿はガウスの側に戻り、「曲率を測った」という一語が四つの別の量を指しうることを、桁で示す。

2. 厳密な言明はガウス＝ボンネである

事実 2.1：測地線三角形について $\sum \theta_i - \pi = \int K dA$ である。曲率が一定なら右辺は KA に、球面なら A/R^2 になる。

検算 2.2：単位球の八分の一（三つの直角、面積 $4\pi/8$ ）で

内角の和 $-\pi$	1.57079632679
A/R^2	1.57079632679
差	0.0

（証明終）

3. その三角形は、確かに曲率を測っている

検算 3.1：三辺を 69, 85, 107 km とすると

面積（ヘロン）	2929.43 km ²
地表の $K = 1/R^2$	$2.46368 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2}$
球面過剰	$7.21717 \times 10^{-5} \text{ rad} = 14.8865 \text{ 秒角}$

（証明終）

観察 3.2

これは隠れた微小量ではない。十五秒角は、当時の三角測量が日常的に扱っていた大きさである。測量が球面過剰を補正するのは、まさにそれが見えるからである。

4. ブレーキ：それは地表の曲率であって、空間の曲率ではない

検算 4.1：地球の $GM/c^2 = 4.4350 \times 10^{-3} \text{ m}$ を使う。

空間切断の $ K \sim (GM/c^2)/r^3$	$1.71503 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2}$
同じ三角形での角欠損	$5.02404 \times 10^{-14} \text{ rad} = 1.03628 \times 10^{-8} \text{ 秒角}$
地表側との比	1.43653×10^9

(証明終)

観察 4.2

二つは九桁違う。十九世紀の器械でも、二十一世紀の器械でも、この三角形で両者を分離することはできない。測量が見たのは地表であって、空間ではない。

観察 4.3

混同が起きるのは、驚異の定理（論文91）が正しいからである。地表の曲率は内在的であり、面の内側にいるだけで測れる。だからこそ「内側から測れた」ことが「空間の内側から測れた」ことのように聞こえる——しかし内在的であることは、どの多様体の内在量かを言わない。

5. 宇宙論的曲率と、零結果が与える下限

検算 5.1：曲率半径を 10^{27} m と保守的に置くと $|K| \lesssim 10^{-54} \text{ m}^{-2}$ 、同じ三角形での角欠損は $2.929 \times 10^{-45} \text{ rad} = 6.042 \times 10^{-40} \text{ 秒角}$ である。第4節よりさらに三十一桁下である。（証明終）

検算 5.2：逆に、精度 σ の零結果が与える下限は $|K| < \sigma/A$ である。

精度	$ K $ の上限 (m^{-2})	曲率半径の下限 (m)	地球半径の何倍か
1 秒角	1.655×10^{-15}	2.458×10^7	3.858
0.5 秒角	8.275×10^{-16}	3.476×10^7	5.456
0.1 秒角	1.655×10^{-16}	7.773×10^7	12.2
0.01 秒角	1.655×10^{-17}	2.458×10^8	38.58

(証明終)

観察 5.3

完璧な零結果を 0.01 秒角で得たとしても、曲率半径は地球半径の 38.58 倍より大きい、としか言えない。空間の幾何の検査としては、この三角形は小さすぎる——そして「小さすぎる」は、器械の問題ではなく面積の問題である。

6. 最も鋭い柵は、精度ですらない

観察 6.1

測量の水平角は手続きの一部として基準面へ帰化される。すなわち、器械がいくら良くなっても、出力される「三角形の内角」は基準面上の量である。

観察 6.2

したがって測られている対象は、空間についての問いが立つより前に、構成上すでに「その面の上の三角形」である。これは第4節・第5節より鋭い柵である——前二節は「小さすぎて見えない」と言い、本節は「そもそも別の対象を見ている」と言う。

観察 6.3

本稿は歴史上の意図を判定しない。ガウスが何を考えていたかは資料の問題であり、本稿の道具は数だけである。数が言うのは、意図がどうであれ、この三角形は空間の曲率を決められなかった、ということだけである。

7. 点呼：四つの「曲率」

観察 7.1

名	どの多様体か	K の桁 (m^{-2})	この三角形で
面の曲率	地表（2次元）	2.5×10^{-14}	15 秒角：測れた
空間の曲率	地球まわりの空間切断	1.7×10^{-23}	10^{-8} 秒角：測れない
宇宙の曲率	宇宙論的空間切断	$< 10^{-54}$	10^{-40} 秒角：測れない
時空の曲率	潮汐（4次元）	—	角度では出ない：別の量

観察 7.2

分離子は「どの多様体に三角形が載っているか」である。難しさでも精度でもない——同じ言葉、同じ図、同じ内角の和が、四つの別の量を指している。

8. 結論

1. 厳密な言明はガウス＝ボンネである（検算2.2）。八分の一球で差はゼロ。
2. 測量は確かに曲率を測った（検算3.1）。14.8865 秒角。
3. ただしそれは地表の曲率である（検算4.1）。空間側は 10^{-8} 秒角、九桁下。
4. 零結果の下限は弱い（検算5.2）。0.01 秒角でも地球半径の 38.58 倍。
5. 最も鋭い柵は帰化の手続きにある（観察6.2）。
6. 分離子はどの多様体かである（観察7.1）。

結び：「曲率を測った」という文は、多様体の名を書かないかぎり、まだ量を指していない。ガウスの三角形は、確かに曲がった何かの上に載っていた。それは私たちが立っている地面だった。

参考文献

1. Gauss, C. F. (1828). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores, 6.
2. Bonnet, O. (1848). *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*. Journal de l'École Polytechnique, 19.
3. do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall.
4. Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman.
5. Torge, W., & Müller, J. (2012). *Geodesy*, 4th ed. De Gruyter.
6. Planck Collaboration (2020). *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*. Astronomy & Astrophysics, 641, A6.
7. 山岸勇輝 (2026). 内在的曲率 [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
8. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
9. 山岸勇輝 (2026). 王道の交差 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
10. 山岸勇輝 (2026). ポアンカレ=ホップは一方向にしか働かない [論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576
11. 山岸勇輝 (2026). 光の曲がりの「4」は二かける二である [論文134]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080727

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)