

平均場は次元を見ないが、外れ方は次元だけで決まる

— 一次元では相転移が無いのに $kT_c/J = 2$ と言い、二次元では **76.27%** 過大である — 指数は $d \geq 4$
で厳密になるのに、 T_c は決してならない — [論文271]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

平均場近似は、どの次元でも相転移を予言する。本稿が問うのは、その外れ方が何で決まるかである——答は、次元だけである。近似の中に次元は入っていないのに、外れる量は次元だけの関数になっている。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、一次元で無限に外す。厳密には $T_c = 0$ (相転移しない) なのに、平均場は $kT_c/J = 2$ と言う——比は定義できない (第2節)。第二に、これが本稿の芯である。二次元の厳密解 (オンサーガー) は $kT_c/J = 2.269185$ 、平均場は **4**——**76.27%** 過大である (第3節)。第三に、次元を上げると外れ方が縮む。三次元で **32.99%**、四次元で **19.76%**——単調に減る (第3節)。第四に、しかし決してゼロにならない。比は $1.76275 \rightarrow 1.32993 \rightarrow 1.19755$ と 1 に近づくが、 d が有限である限り 1 にはならない (第4節)。第五に、指数のほうは $d \geq 4$ で厳密になる。上部臨界次元を超えると臨界指数は平均場の値と一致する——同じ近似が、一方では正確になり、他方では最後まで外れる (第5節)。第六に、連続対称性ではもっと悪い。マーミン=ワグナーにより $d \leq 2$ では自発的破れが起きないのに、平均場はすべての次元で起きると言う (第6節)。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——平均場近似、オンサーガーの厳密解、上部臨界次元が 4 であること、マーミン=ワグナーの定理は、いずれも標準的である。統計力学を作らない——使うのは一つの比と、四つの値の突き合わせだけである。厳密解を導かない——オンサーガーの $2/\ln(1+\sqrt{2})$ は引用であり、三次元と四次元の値は数値計算による推定である。くりこみ群に立ち入らない——論文117と120が扱う。本稿は外れ方の大きさを並べるだけである。臨界指数を計算しない——論文117が平均場を「素朴な次元勘定で $\eta=0$ を与えるもの」として扱い、上部臨界次元 4 を結合定数の冪勘定から書いている。本稿はその指数の話に入らず、 T_c の値だけを見る。極限の順序を扱わない——論文245はキュリー=ワイス模型で極限の順序を扱い、臨界指数もくりこみ群も扱わないと明記している。本稿は順序ではなく、外れ方の大きさである。マーミン=ワグナーを証明しない——結論を引くだけである。既刊のマーミン 8 件 (論文11・41・185) は量子測定と欠陥の分類であり、同じ人の別の仕事である。パーコレーションの上部臨界次元と混同しない——論文264の6はパーコレーションのもので、本稿の4はイジングのものである。既刊との関係：論文117はスケール不変性が四通りに指数を選ぶことを分けた——本稿は指数ではなく転移温度を見る。論文120は次元解析が二通りに破れることを示した——本稿は破れの大きさを次元ごとに数える。論文245は二つの極限が順序を書くまで答を持たないことを示した——本稿は同じ平均場模型を、順序ではなく精度の側から見る。論文264は閾値が格子の持ち物で指数が次元の持ち物だと書いた——本稿は T_c と指数で、次元への従い方が違うことを書く。同じ形の分け方である。論文190は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿は百分率と比で書く。加えたのは外れ方を $76.27\% \cdot 32.99\% \cdot 19.76\%$ と次元ごとに数えたこと、一次元では比が定義できないと書いたこと、1に近づくが到達しないことを $1.76275 \rightarrow 1.19755$ と並べたこと、指数は $d \geq 4$ で厳密になるのに T_c は決してならないという非対称を書いたことである。

1. 記法と位置づけ

設定：イジング模型を考える。各格子点にスピン ± 1 を置き、隣り合うスピンの積に $-J$ を掛けて足す。 d 次元の単純立方格子では、隣の数 (配位数) は $z = 2d$ である。

平均場近似：一つのスピンの感じる場を、周りの平均で置き換える。そうすると転移温度は $kT_c/J = z = 2d$ になる——隣の数しか見ていない。

問い：この近似は、どれだけ外れるのか。

答は、次元だけで決まる。近似の中に「次元」は入っていない——入っているのは配位数だけである。それでも外れ方は次元の関数になる。

注意：本稿の「マーミン」はマーミン=ワグナーの定理である。既刊の 8 件は量子測定と欠陥の分類であり、同じ人の別の仕事である——混同しない。

2. 一次元では、無限に外す

検算 2.1：一次元イジング鎖を厳密に解くと、有限の温度では磁化が立たない。

kT_c/J	
厳密（一次元）	0 （相転移しない）
平均場（ $z = 2$ ）	2
比	定義できない

観察 2.2

これは「精度が悪い」ではない。無いものを有ると言っている——百分率で書けない種類の誤りである。

観察 2.3

理由は一行で言える。一次元では、一箇所を反転させる代価が有限なので、どんなに低い温度でも秩序が壊れる——平均場はこの「一箇所」を見ていない。

3. 芯：外れ方を次元ごとに数える

検算 3.1：二次元の厳密解はオンサーガー（1944）が与えた。 $kT_c/J = 2/\ln(1 + \sqrt{2})$ である。

次元 d	配位数 $z = 2d$	平均場	厳密（または数値）	過大の割合
1	2	2.0000	0.000000	定義できない
2	4	4.0000	2.269185	76.27%
3	6	6.0000	4.511500	32.99%
4	8	8.0000	6.680300	19.76%

観察 3.2

外れ方が単調に縮む。**76.27** → **32.99** → **19.76** パーセント——次元を上げるほど平均場が当たるようになる。

観察 3.3

分離子——何を動かすと外れ方が変わるか。次元だけである。結合の強さも、格子の形も、スピンの大きさも動かしていない——そして平均場の式には次元が入っていないのに、外れ方は次元の関数になっている。

観察 3.4

理由は、平均場がゆらぎを一切見ないことである。次元が高いほど隣が多く、ゆらぎが平均されて小さくなる——近似が良くなるのは、近似が正しくなるからではなく、無視したものが小さくなるからである。

4. しかし、決してゼロにならない

検算 4.1：比（平均場を厳密で割ったもの）を並べる。

次元 d	平均場／厳密
2	1.76275
3	1.32993
4	1.19755
$d \rightarrow \infty$	1（極限でのみ）

観察 4.2

1 に近づくが、有限の d では届かない。平均場が T_c について厳密になるのは無限次元だけである——現実の次元では、どこまで行っても外れている。

観察 4.3

これは第3節の 76.27% という数と、同じことを別の書き方で言っている。どちらも「近づくが到達しない」を表している。

5. 指数は $d \geq 4$ で厳密になるのに、 T_c は決してならない

観察 5.1

上部臨界次元は 4 である。 $d \geq 4$ では、臨界指数が平均場の値と一致する（対数補正を除く）。

検算 5.2：二つの量を、次元への従い方で並べる。

量	$d \geq 4$ で	$d \rightarrow \infty$ で
臨界指数	厳密になる	厳密
転移温度 T_c	まだ 19.76% 外れる	そこで初めて厳密

観察 5.3

同じ一つの近似が、一方では有限の次元で正確になり、他方では最後まで外れる。「平均場が正しくなる次元」という一語が、二つの別のことを指している——指数について言うなら 4、 T_c について言うなら無限である。

観察 5.4

論文117 は指数の側を扱った—— $\eta = 0$ を与える素朴な次元勘定として平均場を置き、上部臨界次元 4 を結合定数の冪勘定から書いている。本稿は T_c の側であり、その二つの側で答が違うことが本節の内容である。

観察 5.5

論文264 は、パーコレーションで閾値が格子の持ち物、指数が次元の持ち物だと書いた。本稿はイジングで T_c と指数の次元への従い方が違うと書く——同じ形の分け方が、別の現象にも現れている。

6. 連続対称性では、もっと悪い

観察 6.1

イジングのスピンは ± 1 の二値、すなわち離散である。連続に回せるスピン（ハイゼンベルクやXY模型）にすると、話が変わる。

検算 6.2：マーミン＝ワグナーの定理が言うことを、平均場の予言と並べる。

次元	連続対称性の自発的破れ	平均場は
$d = 1$	起きない	起きると言う
$d = 2$	起きない	起きると言う
$d = 3$	起きる	起きると言う

観察 6.3

離散対称性（イジング）では二次元で秩序が立つのに、連続対称性では立たない。平均場はこの区別を一つも見っていない——どちらでも同じ答を返す。

観察 6.4

したがって「平均場がどれだけ外れるか」は、次元だけでなく対称性の型にも依る。第3節の表は離散対称性の場合であり、連続対称性ではもっと悪い——正直に書くべき点である。

7. 点呼と結び

1. 一次元で無限に外す（検算2.1）：厳密は **0**、平均場は **2**。
2. 百分率で書けない誤り（観察2.2）：無いものを有ると言っている。
3. 二次元で **76.27%** 過大（検算3.1）：**4** 対 **2.269185**。
4. 三次元で **32.99%**、四次元で **19.76%**（検算3.1）：単調に縮む。
5. 分離子は次元だけ（観察3.3）：式には次元が入っていない。
6. **1** に近づくが到達しない（検算4.1）：**1.76275** → **1.19755**。
7. 指数は $d \geq 4$ で厳密（検算5.2）： T_c は無限次元でのみ。
8. 二つの側で答が違う（観察5.3）：**4** と、無限。
9. 連続対称性ではもっと悪い（検算6.2）： $d \leq 2$ で起きないのに起きると言う。

結び：平均場近似の式には、次元が一度も現れない。現れるのは配位数 z だけである——それでも外れ方は次元だけの関数になっていた。一次元では無いものを有ると言い、二次元では **76.27%** 過大、三次元で **32.99%**、四次元で **19.76%**——単調に縮むが、有限の次元では決してゼロにならない。そして臨界指数のほうは $d \geq 4$ で厳密になる——同じ一つの近似が、一方では有限の次元で正確になり、他方では無限次元でしか正確にならない。さらに連続対称性では、 $d \leq 2$ で秩序が立たないのに立つと言う。分けるものは一つ——何について「平均場が正しくなる」と言っているのかを書き出すこと。書き出せば、**4** という数が指数の話で、 T_c の話ではないことが分かる。書き出さなければ、四次元で平均場が完全に正しくなったと読んでしまう。

参考文献

1. Onsager, L. (1944). Crystal Statistics I: A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. *Physical Review*, 65(3).
2. Mermin, N. D. and Wagner, H. (1966). Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models. *Physical Review Letters*, 17(22).
3. Ising, E. (1925). Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeitschrift fuer Physik*, 31(1).
4. Goldenfeld, N. (1992). *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Reading: Addison-Wesley.
5. Baxter, R. J. (1982). *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. London: Academic Press.
6. Ferrenberg, A. M., Xu, J. and Landau, D. P. (2018). Pushing the Limits of Monte Carlo Simulations for the Three-Dimensional Ising Model. *Physical Review E*, 97(4).
7. 山岸勇輝 (2026). スケール不変性は、四通りに指数を選ぶ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
8. 山岸勇輝 (2026). 次元解析は、二通りに破れる [論文120]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22036433
9. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
10. 山岸勇輝 (2026). 二つの極限は、順序を書くまで答を持たない [論文245]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22159739

11. 山岸勇輝 (2026). 同じ現象の中に、格子で変わる数と変わらない数が同居している [論文264]. Zenodo.
10.5281/zenodo.22169720

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)