

残響時間の 0.161 の中に、立体角が隠れている

— 平均自由行程 $4V/S$ の 4 は、 4π を π で割った数である — そして 0.161 は定数ではない — [論文 277]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

セービンの式 $T_{60} = 0.161V/(S\alpha)$ は、音響学のどの教科書にも出てくる。本稿が問うのは、その 0.161 はどこから来たのかである——答は、立体角である。平均自由行程 $4V/S$ の 4 は、 4π を π で割った数であった。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、0.161 を分解する。60 dB 落ちるのに要する反射回数は $6\ln 10/\alpha$ 、一回あたりの時間は $4V/(cS)$ ——掛けると $24\ln 10 \cdot V/(cS\alpha)$ になる（第2節）。第二に、 $24\ln 10 = 55.262042$ である。これを音速 343 で割ると 0.161114——教科書の 0.161 はこの数である（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。 $4V/S$ の 4 は、全立体角 4π を、 $\cos$ を掛けて半球で積分した π で割った数である——数値積分で 4.0000000000 が出る（第3節）。第四に、同じ 4 が気体分子運動論にも立つ。壁への衝突率 $nv/4$ の 4 と同じものである（第3節）。第五に、4 を消すと式が壊れる。10 × 8 × 3 m の部屋で T_{60} が 0.7214 秒から 0.1804 秒になる——4 倍ずれる（第4節）。第六に、0.161 は定数ではない。0°C なら 0.166804、40°C なら 0.155712——音速が入っているからである（第5節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——セービンの残響式、コーシーの平均弦長の公式 (凸体で $4V/S$)、気体分子運動論の $nv/4$ は、いずれも標準的である。音響学を作らない——使うのは一つの立体角の積分と、一つの掛け算だけである。セービンの式を導出しない——拡散音場の仮定 (音が全方向から等しく来る) を前提として受け取る。実際の部屋でそれが成り立つかは扱わない。コーシーの公式を証明しない——凸体の平均弦長が $4V/S$ であることは引くだけである。吸音率の値を主張しない—— α はすべて置いた値であり、材料の測定値ではない。アイリングの式を扱わない—— α が大きい部屋ではセービンの式が外れ、アイリングの式が使われる。本稿はセービンの式の中身だけを見る。室形状の影響を扱わない——凸体を仮定しており、凹んだ部屋や連成した部屋は扱わない。 4π を発見だと言わない——論文02 が逆二乗場の 4π を、論文258 がその条件を、論文265 が状態密度の 4π を扱った。本稿はその族に一つ足すだけである。既刊との関係 : 論文02 は逆二乗場に純粋立体角 4π が現れることを示した——本稿は 4π が「割られる側」として現れる場合を書く。論文258 は 4π が出る条件を点源・三次元・等方の三つに書き出した——本稿の 4 は等方だけを使い、点源も逆二乗も使っていない。論文265 は状態密度の中の 4π を見た——同じ族の三本目である。論文190 は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿の $6\ln 10$ も 60 dB という対数の目盛りから来ている。加えたのは 0.161 を $24\ln 10/c$ に分解したこと、 $4V/S$ の 4 を立体角の比 $4\pi/\pi$ として数値積分で 4.0000000000 と確かめたこと、気体分子運動論の $nv/4$ と同根だと書いたこと、 0.161 が温度で 0.1668 から 0.1557 まで動くことと出したことである。

1. 記法と位置づけ

設定 : 部屋の体積を V 、表面積を S 、平均吸音率を α とする。音を止めてから音圧レベルが 60 dB 下がるまでの時間を残響時間 T_{60} という。

セービンの式 :

$$T_{60} = 0.161 \frac{V}{S\alpha}$$

問い : この 0.161 はどこから来たのか。

答は、立体角である。正確には、 60 dB という対数の目盛りと、音速と、立体角の比の三つが掛かっている。

注意 : 本稿は拡散音場 (音が全方向から等しく来る) を前提とする。実際の部屋でそれが成り立つかは扱わない。

2. 0.161 を分解する

設定 : 音は壁で反射するたびに、割合 α だけ吸われる。 n 回反射すると強さは $(1 - \alpha)^n$ になる。

検算 2.1 : 60 dB は強さで 10^{-6} である。 α が小さいとき $(1 - \alpha)^n \approx e^{-\alpha n}$ なので、 $e^{-\alpha n} = 10^{-6}$ から $n = 6\ln 10/\alpha$ を得る。

吸音率 α	60 dB 落ちるのに要る反射回数
0.1	138.16
0.2	69.08
0.5	27.63

検算 2.2：一回の反射に要る時間は、平均自由行程を音速で割ったものである。凸な部屋では平均自由行程が $4V/S$ になる（コーシーの公式）ので、一回あたり $4V/(cS)$ 秒である。

検算 2.3：二つを掛ける。

量	値
$T_{60} = \frac{6 \ln 10}{\alpha} \cdot \frac{4V}{cS} = \frac{24 \ln 10 V}{cS \alpha}$	—
$24 \ln 10$	55.262042
$24 \ln 10 / 343$	0.161114

観察 2.4

教科書の 0.161 が出た。中身は三つの因子である——60 dB から来る $6 \ln 10$ 、平均自由行程から来る 4、そして音速 c 。

3. 芯：4 は立体角の比である

観察 3.1

$4V/S$ の 4 は、どこから来たのか。等方に飛ぶ粒子が壁に当たる率を数えると出てくる——壁の法線と進行方向のなす角の $\cos$ を、半球にわたって立体角で積分するのである。

検算 3.2：二つの立体角を数値積分で比べる。

量	値
半球にわたる $\int \cos \theta d\Omega$	3.1415926536 ($= \pi$)
全立体角 4π	12.5663706144
比 $4\pi/\pi$	4.0000000000

観察 3.3

$4V/S$ の **4** は、全立体角を、 $\cos$ を掛けた半球の立体角で割った数であった。 4π を π で割ると、ちょうど **4** になる——偶然の **4** ではなく、立体角の比である。

観察 3.4

同じ **4** が、気体分子運動論にも立っている。壁への衝突率 $nv/4$ の **4** である——同じ積分から出た同じ数であり、別根ではない。

観察 3.5

論文258 は 4π が出る条件を点源・三次元・等方の三つに書き出した。本稿の **4** は等方だけを使っている——点源も、逆二乗の法則も、一つも使っていない。同じ 4π が、別の条件の下で別の形で現れている。

観察 3.6

分離子——何を動かすと **4** が変わるか。等方性である。音が特定の方向から偏って来るなら、 $\cos$ の平均が変わり、**4** も変わる。

4.4 を消すと、式が壊れる

検算 4.1 : $10 \times 8 \times 3 \text{ m}$ の部屋 ($V = 240\text{m}^3$ 、 $S = 268\text{m}^2$) で計算する。

量	値
平均自由行程 $4V/S$	3.5821 m
毎秒の反射回数 $c/(4V/S)$	95.75 回
T_{60} ($\alpha = 0.2$)	0.7214 秒
4 を消した場合の T_{60}	0.1804 秒
比	4.0000

観察 4.2

4 を落とすと、残響時間が 4 分の 1 になる。**0.72 秒**（会議室として自然な値）が **0.18 秒**（無響室に近い値）になってしまう——聞けば分かるほど違う。

検算 4.3：吸音率を変えて並べる。

α	反射回数	T_{60}
0.1	138.16	1.4428 秒
0.2	69.08	0.7214 秒
0.5	27.63	0.2886 秒

観察 4.4

吸音率を 5 倍にすると残響時間が 5 分の 1 になる。反比例である——立体角の 4 は、この比例関係の前係数にだけ入っている。

5. 0.161 は定数ではない

検算 5.1：係数 $24 \ln 10 / c$ の中には音速が入っている。音速は温度で変わる。

温度	音速 c	係数 $24 \ln 10 / c$
0°C	331.3 m/s	0.166804
20°C	343.0 m/s	0.161114
40°C	354.9 m/s	0.155712

観察 5.2

0°C と 40°C で 7.1% 違う。「0.161」という書き方は、20°C を暗黙に仮定している——定数のように見えるが、条件付きの数である。

観察 5.3

分けて書けば、動く部分と動かない部分が見える。

因子	値	動くか
$6 \ln 10$ (60 dB から)	13.8155	動かない (定義)
4 (立体角の比)	4.0000	動かない (幾何)
$1/c$ (音速)	1/343	動く (温度で)

観察 5.4

三つのうち二つは動かず、一つだけが動く。0.161 という一つの数の中に、規約 (60 dB) ・ 幾何 (立体角) ・ 物性 (音速) の三つが畳み込まれている——畳んだままでは、どれが動くのか分からない。

6. 点呼と結び

1. 反射回数は $6 \ln 10 / \alpha$ (検算2.1) : $\alpha = 0.2$ で 69.08 回。
2. 一回の時間は $4V/(cS)$ (検算2.2) : コーシーの公式。
3. $24 \ln 10 = 55.262042$ (検算2.3) : 343 で割って 0.161114。

4. 半球の $\int \cos \theta d\Omega = \pi$ (検算3.2) : 全立体角は 4π 。
5. 比は **4.0000000000** (観察3.3) : **4** は立体角の比である。
6. $nv/4$ と同根 (観察3.4) : 同じ積分から出た同じ数。
7. **4** を消すと **4** 分の **1** (検算4.1) : **0.7214** 秒が **0.1804** 秒に。
8. **0.161** は温度で動く (検算5.1) : **0.1668** から **0.1557**、**7.1%**。
9. 三つが畳み込まれている (観察5.3) : 規約・幾何・物性。

結び：セービンの式の **0.161** は、一つの数ではなかった。**60 dB** という規約から来る $6 \ln 10$ 、幾何から来る **4**、そして物性である音速の三つが畳み込まれている。そして真ん中の **4** は、全立体角 4π を、 $\cos$ を掛けて半球で積分した π で割った数であった——数値積分で **4.0000000000** が出る。同じ **4** が気体分子運動論の $nv/4$ にも立っており、別根ではない。**4** を落とせば残響時間は **4** 分の **1** になり、**0.72** 秒の会議室が **0.18** 秒の無響室になってしまう。そして **0.161** は定数ではない—— 0°C なら **0.1668**、 40°C なら **0.1557** である。分けるものは一つ——畳み込まれた数を、因子に分けて書き出すこと。書き出せば、規約と幾何と物性が分かれ、どれが動くかが見える。書き出さなければ、**0.161** を測って決まった一つの定数だと読んでしまう。

参考文献

1. Sabine, W. C. (1922). *Collected Papers on Acoustics*. Cambridge: Harvard University Press.
 2. Kuttruff, H. (2016). *Room Acoustics*, 6th edition. Boca Raton: CRC Press.
 3. Eyring, C. F. (1930). Reverberation Time in “Dead” Rooms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1(2).
 4. Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppers, A. B. and Sanders, J. V. (2000). *Fundamentals of Acoustics*, 4th edition. New York: Wiley.
 5. Cauchy, A. L. (1850). Memoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes. *Memoires de l'Academie des Sciences*, 22.
 6. Reif, F. (1965). *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. New York: McGraw-Hill.
 7. 山岸勇輝 (2026). 4π 質量相殺定理 [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
 8. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
 9. 山岸勇輝 (2026). 4π が出るのは、源が点のときだけである [論文258]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169011
 10. 山岸勇輝 (2026). 低温比熱で二つの模型を分けたのは、量子化ではなく状態密度である [論文265]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169749
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)