

鎖の指数を変えたのは「自分を避ける」ことだけであり、四次元より上ではその代価が消える

— 指数の **2.11%** の誤差が、 $N = 10^9$ では長さで **29.33%** になる — そして $2 + 2 = 4$ が、避ける意味を失わせる — [論文279]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

高分子の鎖の広がり、単位数 N の冪で決まる。ガウス鎖では $N^{1/2}$ 、自分を避ける鎖では $N^{0.588}$ である。本稿が問うのは、その差がどこから来て、どこで消えるのかである——答は、 $2 + 2 = 4$ という数え上げである。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、二つの鎖を並べる。 $N = 10^6$ でガウス鎖は **1000.0**、自己回避鎖は **3353.8**——**3.3538** 倍である（第2節）。第二に、差は N とともに開き続ける。 $N = 10^{12}$ で **11.2481** 倍、比が **10** になるのは $N = 10^{11.42}$ である（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。フローリーの式は $\nu = 0.6$ 、厳密値は **0.58759**——指数の誤差は **2.11%** だが、 $N = 10^9$ の長さでは **29.33%** になる（第3節）。第四に、四次元で二つが一致する。フローリーの $3/(d+2)$ は $d = 4$ でちょうど **0.5000**——ガウス鎖と差がゼロになる（第4節）。第五に、そこでフローリーの式は役目を終える。 $d = 5$ では **0.4286** を返すが、これは **0.5** を下回るので物理的にありえない（第4節）。第六に、**4** の出どころは数え上げである。 d 次元の道二本の像は合わせて $2 + 2 = 4$ 次元—— $d > 4$ では一般の位置で交わらないので、避ける必要がそもそも生じない（第5節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ガウス鎖の $N^{1/2}$ 、フローリーの $\nu = 3/(d+2)$ 、三次元の厳密値 **0.58759**、上部臨界次元が **4** であることは、いずれも標準的である。高分子物理を作らない——使うのは一つの冪と、次元の数え上げだけである。フローリーの式を導出しない—— $3/(d+2)$ を引くだけであり、自由エネルギーの平衡から出す議論には立ち入らない。**0.58759** を計算しない——数値計算とくりこみ群による引用値である。くりこみ群に立ち入らない——論文117・120 が扱う。ゴム弾性を扱わない——第四波候補「力は六つあり」がゴム紐のエントロピー力を持つ。本稿は弾性ではなく指数に絞る。実在の高分子を扱わない——溶媒の良し悪しも、剛直性も、分岐も扱わない。理想化された鎖だけを見る。 $d = 5$ 以上でフローリーの式を使わない——**0.5** を下回る値を返すので適用範囲の外である。本稿はこれを正直に書く。既刊との関係：論文271 は平均場の上部臨界次元が **4** であることを扱った——本稿の **4** も上部臨界次元だが、別の現象（イジングの相転移と、鎖の自己回避）で同じ次元が出ている。論文256 は二つの指数を見分けるのに要る範囲を数えた——本稿は逆に、指数のわずかな誤差が長さでどれだけ増幅されるかを数える。論文144 は指数を、何が保存しているかの署名として読んだ——本稿の署名は自己回避という束縛である。論文117 はスケール不変性が四通りに指数を選ぶことを分けた——本稿はその一つ（不動点）に属する指数を扱う。論文190 は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿も比を桁で書く。加えたのは指数の **2.11%** の誤差が $N = 10^9$ の長さで **29.33%** に増幅されると計算したこと、自己回避とガウスの比が **10** になる N を $10^{11.42}$ と出したこと、 $d = 5$ でフローリーの式が物理的にありえない値を返すと正直に書いたこと、**4** の出どころを **2 + 2** の数え上げとして書いたことである。

1. 記法と位置づけ

設定： N 個の単位からなる鎖を、 d 次元空間に置く。端から端までの距離 R が N^ν に比例するとき、 ν を広がり
の指数という。

鎖	束縛	ν (三次元)
ガウス鎖	なし (自分と重なってよい)	0.5
自己回避鎖	自分を避ける	0.58759

問い：束縛を一つ加えただけで、指数が変わる。その差はどこで消えるのか。

答は、四次元である。そして**4** は **2 + 2** という数え上げから出ている。

2. 二つの鎖を並べる

検算 2.1 : $R \propto N^\nu$ を、二つの指数で計算する (比例定数は **1** とする)。

N	ガウス (0.5)	自己回避 (0.58759)	比
10^2	10.0	15.0	1.4969
10^4	100.0	224.1	2.2406
10^6	1000.0	3353.8	3.3538
10^9	31622.8	194227.2	6.1420
10^{12}	10^6	1.1248×10^7	11.2481

観察 2.2

比は N とともに開き続ける。指数の差が 0.08759 しかないのに、 $N = 10^{12}$ で 11 倍になる——冪の差は、桁が積み上がると効く。

観察 2.3

比が 10 になるのは $N = 10^{11.42}$ である。 $1/(0.58759 - 0.5) = 11.42$ から出る——必要な桁数は、指数の差の逆数である。

観察 2.4

分離子——何を動かすと指数が変わるか。自分を避けるかどうか、その一つだけである。単位の長さも、鎖の柔らかさも、温度も動かしていない。

3. 芯：指数の 2.11% が、長さでは 29.33% になる

設定：フローリーは自由エネルギーの釣り合いから $\nu = 3/(d + 2)$ を得た。三次元では 0.6 である。厳密値（数値計算とくりこみ群）は 0.58759 である。

検算 3.1：指数の誤差は $(0.6 - 0.58759)/0.58759 = 2.1120\%$ である。これが R でどうなるかを見る。

N	フローリー (0.6)	厳密 (0.58759)	過大の割合
10^2	15.85	14.97	5.88%
10^4	251.19	224.06	12.11%
10^6	3981.07	3353.82	18.70%
10^9	251188.64	194227.18	29.33%

観察 3.2

指数の誤差は 2.11% で固定なのに、長さの誤差は $5.88 \rightarrow 12.11 \rightarrow 18.70 \rightarrow 29.33$ と増え続ける。冪の中の小さな誤差は、桁とともに増幅される。

観察 3.3

論文256 は、二つの指数を見分けるのに要る範囲を数えた。本稿はその逆である——範囲を広げると、指数の誤差が見えてくる。同じ関係を、両方向から見ている。

観察 3.4

フローリーの式が 2.11% しか外さないのは、むしろ驚くべきことである。自由エネルギーの二項を釣り合わせるだけの粗い議論で、この精度が出る——ただし、それが偶然かどうかを本稿は論じない。

4. 四次元で一致し、そこで式が役目を終える

検算 4.1：フローリーの $3/(d+2)$ を、次元ごとに計算する。

d	フローリー $3/(d+2)$	ガウス	差
1	1.000000	0.5	+0.5000
2	0.750000	0.5	+0.2500
3	0.600000	0.5	+0.1000
4	0.500000	0.5	0.0000
5	0.428571	0.5	-0.0714

観察 4.2

$d = 4$ でちょうど 0.5 になり、ガウス鎖と差がゼロになる。避けても避けなくても、同じ広がりになる。

観察 4.3

正直に書くべき点—— $d = 5$ の **0.4286** は、物理的にありえない。自分を避ける鎖が、避けない鎖より縮むことはない—— $\nu \geq 0.5$ でなければならない。

観察 4.4

つまりフローリーの式は $d \geq 4$ で適用範囲の外である。正しくは $d \geq 4$ で $\nu = 0.5$ ちょうど ($d = 4$ では対数補正がつく) ——式が $d = 4$ でちょうど正解を返し、その先で壊れる。

観察 4.5

これは式の欠陥ではなく、範囲の話である。フローリーの議論は「避けることが効く」場面のために作られており、効かなくなった先を予言する義務を負っていない。

5.4 の出どころは、数え上げである

観察 5.1

なぜ 4 なのか。道が自分と出会うかどうかを、次元で数えればよい。

検算 5.2 : d 次元空間の中で、二つの部分が交わる条件を数える。

d	二本の道の次元の和	$2 + 2 - d$	交わるか
2	$2 + 2 = 4$	+2	交わる
3	$2 + 2 = 4$	+1	交わる
4	$2 + 2 = 4$	0	ちょうど境目
5	$2 + 2 = 4$	-1	交わらない

観察 5.3

ランダムウォークの像は、確率論的には次元 2 の対象として振る舞う。二本を一般の位置に置くと、交わりの次元は $2 + 2 - d$ である—— $d > 4$ で負になり、交わらない。

観察 5.4

したがって $d > 4$ では、避けようとしても、そもそも出会わない。束縛が空虚になるので、指数がガウス鎖に戻る——束縛が消えたのではなく、束縛する相手が居なくなった。

観察 5.5

分離子——何を動かすと代価が消えるか。空間の次元である。鎖も、束縛の定義も、一つも動かしていない。

6. 論文271 と同じ 4 である

観察 6.1

論文271 は、平均場の上部臨界次元が 4であることを扱った（イジング模型）。本稿の 4 も上部臨界次元である——だが現象が違う。

検算 6.2：二つを並べる。

論文271（イジング）		本稿（自己回避鎖）
$d \geq 4$ で起きること	臨界指数が平均場に一致	ν がガウス鎖に一致
消えるもの	ゆらぎの効き	自己交差
4 の出どころ	結合定数の冪勘定	$2 + 2 - d$ の数え上げ

観察 6.3

同じ 4 が、別の道から出ている。片方は結合定数の次元勘定、片方は幾何的な交わりの数え上げである——同根か別根かは、道筋で判定する。

観察 6.4

正直に書くべき点——両者はくりこみ群の言葉では繋がっている（自己回避鎖は $n \rightarrow 0$ 極限の ϕ^4 模型に対応する）。本稿はそこに立ち入らない——同根である可能性を否定しないが、本稿の道具では判定できない。

7. 点呼と結び

- 1. $N = 10^6$ で 3.3538 倍（検算2.1）：1000.0 対 3353.8。
- 2. 比が 10 になるのは $N = 10^{11.42}$ （観察2.3）：指数の差の逆数。
- 3. 指数の誤差は 2.11%（検算3.1）：0.6 対 0.58759。
- 4. 長さでは 29.33% に（検算3.1）： $N = 10^9$ で。

5. $d = 4$ で差がゼロ (検算4.1) : **0.500000** ちょうど。
6. $d = 5$ の **0.4286** はありえない (観察4.3) : 式が範囲の外。
7. $2 + 2 - d$ が **4** で **0** (検算5.2) : そこから先は交わらない。
8. 束縛する相手が居なくなる (観察5.4) : 束縛が消えたのではない。
9. 論文271 と同じ **4** (検算6.2) : 別の道から出ている。

結び : 鎖の指数を変えたのは、「自分を避ける」という束縛ただ一つであった。三次元では **0.5** が **0.58759** になり、 $N = 10^{12}$ では長さが **11.2481** 倍違ってくる。そしてフローリーの近似は指数を **2.11%** しか外さないのに、 $N = 10^9$ の長さでは **29.33%** 外す——冪の中の小さな誤差は、桁とともに増幅される。だが四次元で、この差がちょうど消える。理由は幾何の数え上げである——二本の道の次元の和が $2 + 2 = 4$ なので、 $d > 4$ では一般の位置で交わらない。束縛が消えたのではなく、束縛すべき相手が居なくなったのである。そしてそこでフローリーの式も役目を終える—— $d = 5$ で **0.4286** という、避ける鎖が避けない鎖より縮むというありえない値を返す。分けるものは一つ——束縛が効く場面かどうかを、数え上げで確かめること。確かめれば、式を使ってよい範囲が分かる。確かめなければ、**0.4286** という値を鎖の性質として読んでしまう。

参考文献

1. Flory, P. J. (1953). *Principles of Polymer Chemistry*. Ithaca: Cornell University Press.
2. de Gennes, P. G. (1979). *Scaling Concepts in Polymer Physics*. Ithaca: Cornell University Press.
3. Clisby, N. (2010). Accurate Estimate of the Critical Exponent ν for Self-Avoiding Walks via a Fast Implementation of the Pivot Algorithm. *Physical Review Letters*, 104(5).
4. Madras, N. and Slade, G. (1993). *The Self-Avoiding Walk*. Boston: Birkhauser.
5. Doi, M. and Edwards, S. F. (1986). *The Theory of Polymer Dynamics*. Oxford: Clarendon Press.
6. Hara, T. and Slade, G. (1992). Self-Avoiding Walk in Five or More Dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, 147(1).
7. 山岸勇輝 (2026). スケール不変性は、四通りに指数を選ぶ [論文117]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22005515
8. 山岸勇輝 (2026). 指数は、何が保存しているかの署名である [論文144]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082585
9. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
10. 山岸勇輝 (2026). 力学相似が厳密に成り立つ縮尺は、**1** だけである [論文256]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22168919
11. 山岸勇輝 (2026). 平均場は次元を見ないが、外れ方は次元だけで決まる [論文271]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169925

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)