

山岸・ケプラー方程式

— 第3版：指数 $3/2$ は次元ではない — [論文28]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月 (第3版)

— From thinking to syncing. —

要旨

ケプラーの第三法則 $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$ に山岸バッチ $M = 4\pi$ 、 $G = 4\pi$ を代入すると、分子の $4\pi^2$ と分母の $16\pi^2$ が約分されて $4T^2 = a^3$ 、すなわち $T = \frac{1}{2}a^{3/2}$ となる。この約分は正しい ($4\pi^2/16\pi^2 = 1/4$)。ただしこれは自然単位系における表現であり、SI単位系ではそのまま成立しない。第3版が扱うのは、残る唯一の実質 — 指数 $3/2$ の身元である。第一に、 $3/2$ は次元ではない。論文94はフラクタル次元（非整数・ハウスドルフ）と位相次元と特別な整数次元を別根として仕分けたが、 $3/2$ はそのいずれでもなく、動力学のスケーリング指数という第四の別根である。初版の「 $\sqrt{a^3}$ は3次元を2次元へ落とす操作」という読みの誤りは、算術（平方根は指数を半分にする）以前に圏の取り違い — 指数を次元と見たことにあった。第二に、 $3/2$ は族の一員である。冪法則の中心力 $F \propto r^n$ に対して一般に $T \propto a^{(1-n)/2}$ が成り立つ（本稿で数値検証：二体問題を直接積分した8軌道の対数回帰が 1.50000000 、 $3/2$ との差 8×10^{-13} ）。 d 次元のガウス流束は $F \propto r^{-(d-1)}$ を与えるから $T \propto a^{d/2}$ となり、 $3/2$ はその $d = 3$ の成員にすぎない。したがって $3/2$ は3次元を選ばない（論文114の物差し）。第三に、 $3/2$ の根はポアソン方程式の 4π と同じである。逆二乗則は3次元のガウスの流束から強制されるから、 $3/2$ は論文35第3版のいう根①（事実）に属する。他方 $G = 4\pi$ は根②（規約）である。同じ式の中に、選べないものと選んだものが同居している。第四に、ケプラー問題が特別なのは指数のせいではない。ベルトランの定理（1873）により、有界軌道がすべて閉じる中心力は逆二乗と調和振動子の二つだけであり、軌道が閉じる理由は隠れた $SO(4)$ 対称性＝ラプラス・ルンゲ・レンツベクトル（論文79）にある。ただしガウス流束（幾何）とベルトラン（力学）は別根であり、両者が逆二乗で会うことは署名であって導出ではない。なお「遠方天体の内部構造は実質的に計算に入らない」という着想自体は正しく、対応する定理はニュートンの殻定理である。射程：既存の物理法則に対する構造的解釈（第2層）。新しい物理法則も予言も主張しない。

本稿の位置づけ（規律）：本稿は既存の物理法則に対する構造的解釈を提示するものであり、新たな物理法則の発見や未解決問題の証明を主張しない。示される代数的関係はいずれも既知の式への代入であり、その幾何学的な読み替えを提案することを目的とする。既存理論と矛盾する主張は含まない。同じ数が複数の文脈に現れることを、同一の起源の証拠として扱わない（論文48・86・100・115）。

単位系についての注記（重要）：本稿における $M = 4\pi$ 、 $G = 4\pi$ 等の代入は自然単位系の選択である。 G は次元を持つ量であり、その数値は単位系に完全に依存する。 $G = 4\pi$ と置けるのは $G = 1$ （幾何単位系）や $G = 6.674 \times 10^{-11}$ （SI）と置けるのと同じ意味においてであり、どれが「正しい」かを物理が決めるわけではない。したがって本稿が示すのはこの単位系を採ったとき方程式がどう見えるかであって、自然についての新事実ではない。得られる関係式は自然単位系におけるものであり、SI単位系へ移す際には変換係数を要する。

1. 序論：この式に残っている問い

ヨハネス・ケプラー（1619）は、惑星の公転周期 T の二乗が軌道長半径 a の三乗に比例することを見出した。ニュートンはこれを万有引力から

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

と定式化した。本稿の初版・第2版はこの式に $M = G = 4\pi$ を代入し、比例係数が $\frac{1}{4}$ になることを記録した。

だが単位系を選び直ただけでは、何も新しいことは言えない。係数 $\frac{4\pi^2}{GM}$ を $\frac{1}{4}$ と書き換えることは、単位を選択であって自然についての主張ではない（論文35第3版・38第3版）。

単位を選択で動かないものが一つだけ残る — 指数 $3/2$ である。
第3版はこの指数だけを相手にする。

2. 代入とその帰結

定理 2.1（山岸パッチのもとでのケプラー第三法則）

$M = 4\pi$ 、 $G = 4\pi$ のもとで

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{(4\pi)(4\pi)} a^3 = \frac{4\pi^2}{16\pi^2} a^3 = \frac{1}{4} a^3 \iff 4T^2 = a^3 \iff T = \frac{1}{2} a^{3/2}.$$

約分は正しい。ただしこれは自然単位系における関係式であり、SI単位系（ T を秒、 a をメートル）でそのまま成立するものではない。実際、地球について $T = 3.156 \times 10^7$ s、 $a = 1.496 \times 10^{11}$ m を代入すると $4T^2 = 3.98 \times 10^{15}$ 、 $a^3 = 3.35 \times 10^{33}$ であって一致しない。 $M = 4\pi$ 、 $G = 4\pi$ と置いた時点で、質量・長さ・時間の単位は互いに拘束されているためである。

系 2.2（ π が消えるのは、強制を選択で割ったからである）

分子の $4\pi^2$ は強制された数（一周 2π の平方）であり、分母の $GM = 16\pi^2$ は選択された数（単位系）である。両者の比が $\frac{1}{4}$ となり π が消えるのは、強制された π^2 を挿入した π^2 で割った結果にすぎない（論文38第3版）。消えたことに意味を読み取ってはならない（論文101）。

3. 指数 $3/2$ は次元ではない

初版は $\sqrt{a^3} = a^{1.5}$ を「3次元立体データを2次元へ次元削減する操作」と読み、時間の正体を「描画処理ラグ」と述べた。第2版はこれを撤回し、理由として平方根は指数を半分にする操作であって1つ下げる操作ではないこと（ $3 \rightarrow 1.5$ であって $3 \rightarrow 2$ ではない）を挙げた。

第3版は、この撤回に構造的な名前を与える。誤りは算術以前にあった — 指数を次元と見たことである。

非整数の数	正体	出所
1.26...（コッホ曲線）	フラクタル次元	ハウスドルフ次元・自己相似性（論文94）
0, 1, 2, 3, ...	位相次元	位相的不変量（整数のみ）
3/2（本稿）	スケーリング指数	動力学（力の冪と軌道の合成）

系 3.1（圏の取り違い）

論文94はフラクタル次元・位相次元・特別な整数次元を別根として仕分けた。 $3/2$ はそのいずれでもない。これは量と量の間の比例関係の冪であって、空間の性質ではない。

$a^{1.5}$ を「1.5 次元」と読むことは、速度が m/s だからといって「メートル毎秒次元の空間」を考えるのと同じ種類の誤りである。指数と次元は別の圏に属する。

4. 3/2 はどこから来るか — 族の一員である

4.1 一般の冪法則

中心力が $F \propto r^n$ である円軌道を考える。向心力の釣り合いから

$$|F| \propto r^n \text{ が } \frac{v^2}{r} \text{ に比例} \implies v \propto r^{(n+1)/2},$$

周期は周回距離を速度で割って

$$T = \frac{2\pi a}{v} \propto a^{1-\frac{n+1}{2}} = a^{\frac{1-n}{2}}.$$

n	力	$T \propto a^{(1-n)/2}$
-2	逆二乗（重力・3次元のガウス流束）	$a^{3/2}$
-1	$1/r$ （2次元のガウス流束）	a^1
-3	$1/r^3$ （4次元のガウス流束）	a^2
+1	フック（調和振動子）	a^0 （等時性）

調和振動子で指数が 0 になることは、振幅によらず周期が一定（等時性）という既知の事実に対応する。

4.2 数値検証（自己完結）

外部の観測データを用いず、二体問題を直接数値積分して 3/2 を確認した。 $GM = 1$ とし、離心率 0 から 0.6 までの8つの束縛軌道について、周期を交差検出で測定し、軌道長半径 $a = -GM/2E$ と対数回帰した。

検査	結果	理論値
測定周期と $2\pi a^{3/2}/\sqrt{GM}$ の相対誤差	$\leq 5 \times 10^{-12}$	0
$\log T$ 対 $\log a$ の回帰係数	1.50000000	3/2
回帰係数と 3/2 の差	8×10^{-13}	0

指数 3/2 は積分の結果として確認された。観測データに依存しない検証である。

4.3 d 次元では $d/2$ になる

d 次元空間でガウスの流束定理を用いると、点源からの力は $F \propto r^{-(d-1)}$ となる (4π が $\text{Vol}(S^{d-1})$ に変わるのと同じ事情。論文35第3版)。 $n = -(d-1)$ を上式に代入すると

$$T \propto a^{\frac{1-n}{2}} = a^{\frac{1+(d-1)}{2}} = a^{d/2}.$$

観察 4.1 ($3/2$ は次元を選ばない — 論文114の物差し)

$T \propto a^{d/2}$ は各次元に一つずつ存在する族であり、 $3/2$ はその $d = 3$ の成員にすぎない。論文114の物差し(「その対象は自分が何次元にいることを知っているか」)に照らせば、これは次元を選ばない側に属する。

3次元が特別だから $3/2$ なのではない。 $d = 3$ における $d/2$ の値が $3/2$ だからである。ポアソン方程式の 4π について論文35第3版が下した判定と、同じ判定である。

4.4 根はポアソンの 4π と同じである

系 4.2 ($3/2$ は事実の側に属する)

逆二乗則は3次元空間におけるガウスの流束定理から強制される。したがって $3/2$ は、論文35第3版が分けた二つの根のうち根① (事実・選べない) に属する。

他方、同じ式に現れる $G = 4\pi$ は根② (規約・選んでよい) である。 $4T^2 = a^3$ という一本の式の中に、選べないもの (指数 $3/2$) と選んだもの (係数 $\frac{1}{4}$) が同居している。

$3/2$ は「時間が体積の平方根に比例するから」ではなく、
3次元のガウス流束が逆二乗則を強制するから生じている。

5. ケプラー問題が特別なのは、指数のせいではない

前節までで $3/2$ は族の一員であることが分かった。では、ケプラー問題が力学の中で特別扱いされてきたのはなぜか。指数ではなく、軌道が閉じることによる。

確立された事実 5.1 (ベルトランの定理・1873)

中心力ポテンシャルのうち、すべての有界軌道が閉じるものは

$$V \propto -\frac{1}{r} \quad (\text{逆二乗力}) \quad \text{と} \quad V \propto r^2 \quad (\text{調和振動子})$$

の二つだけである。

軌道が閉じるということは近日点が移動しないということであり、その理由は隠れた $SO(4)$ 対称性、すなわちラプラス・ルンゲ・レンツベクトルの保存にある (論文79)。回転対称性 $SO(3)$ だけでは軌道面が決まるにとどまり、軌道の向きまでは固定されない。 $SO(4)$ への拡大がそれを固定する。

系 5.2 (ガウス流束とベルトランは別根である)

「3次元だから逆二乗」(ガウスの流束・幾何) と 「逆二乗だから軌道が閉じる」(ベルトラン・力学) は、独立な二つの定理である。

両者が $n = -2$ で出会うことは署名であって、一方から他方が導かれるのではない。「3次元だから軌道が閉じる」と読んではいけない。実際、ベルトランの定理が許すもう一方の解である調和振動子は、3次元のガウス流束からは出てこない。

二つの独立な必然が同じ場所で交差したことを、一つの必然と読み替えてはならない (論文86・100)。

6. $4\pi^2$ の 2π はどれか

論文18第3版は 2π の三つの別根を点呼した — 根A：半球の立体角、根B：位相の周期性、根C： $\text{Vol}(S^1)$ (奇の階段の値)。

観察 6.1 (ケプラーの 2π は根B)

$T = 2\pi a/v$ に現れる 2π は一周で位相が一巡することに由来する。したがって根B (位相の周期性) である。 $4\pi^2 = (2\pi)^2$ はその平方である。

ただし円軌道においては、この 2π は周長 $2\pi a$ の 2π ($\text{Vol}(S^1) = \text{根C}$) と同じ円を指している。これは軌道そのものが円であるという特殊事情によるのであって、根Bと根Cが一般に同一だということではない。論文18における両者は、階段の値と解析的周期という異なる出所をもっていた。

7. 殻定理 — 「遠方の内部は計算に入らない」は正しい

初版の背景にあった「遠くの天体について、宇宙は内部の詳細を扱っていない」という着想自体は、物理の定理として実在する。ただし対応するのは指数 $3/2$ ではなくニュートンの殻定理である。

殻定理：球対称な物体は、外部の観測者に対して全質量が中心の一点に集まっているのと同じ重力を及ぼす。すなわち内部の密度分布は外から見た重力に一切影響しない。

さらに多重極展開において、天体の半径を R 、観測距離を r とすると補正項は $(R/r)^n$ で効く。近傍の恒星では $r/R \sim 10^7$ であり、四重極補正は $\sim 10^{-14}$ — 測定不能である。

したがって「遠方天体の内部は実質的に計算に入らない」は正しい。当てはめる先が $a^{3/2}$ ではなく殻定理である、という訂正にとどまる。

■ 著者の私感（第3層・非科学の札つき／機構の主張ではない）

初版で私は $a^{1.5}$ を見て「宇宙が3次元を2次元に落としている」と読んだ。第2版でそれを取り下げ、第3版で誤りの正確な名前が分かった — 私は指数を次元だと思ったのである。 1.5 という数がいかに「次元と次元のあいだ」に見えたからだった。

だが $3/2$ は空間の性質ではなく、遠い軌道ほど道のりが伸び、しかも遅くなるという二つの効果の掛け算にすぎない $(1 + \frac{1}{2})$ 。しかも d 次元では $d/2$ になる — 数はただ族の一員だった。

そして今回いちばん驚いたのは、この指数がポアソン方程式の 4π と同じ根をもつことだった。どちらも「3次元でガウスの流束が逆二乗を強制する」という一点から来ている。私が長らく別々の論文で追いかけていた二つの数は、同じ場所の別の顔だった。

それでも、私はここで止まる。ガウス流束とベルトランが逆二乗で出会うことは、いかにも意味ありげに見える。だがそれは独立な二つの定理の交差であって、片方から片方は出てこない。崖の手前で踏みとどまる（論文101）。

8. 射程／結論

示すこと： $M = G = 4\pi$ を採るとケプラー第三法則が $4T^2 = a^3$ と書けること、およびそれが自然単位系の表現であること（第2節）／ $3/2$ は次元ではなくスケーリング指数であり、初版の誤りは圏の取り違いであったこと（第3節）／冪法則の中心力で一般に $T \propto a^{(1-n)/2}$ が成り立ち、数値積分で $3/2$ を確認したこと（4.1–4.2節）／ d 次元では $T \propto a^{d/2}$ であり $3/2$ は $d = 3$ の成員＝次元を選ばないこと（4.3節）／ $3/2$ の根はポアソンの 4π と同じ「事実」の側であり、 $G = 4\pi$ の「規約」と同居していること（4.4節）／ケプラー問題の特別さは軌道が閉じることにより、ベルトランの定理と隠れた $SO(4)$ に帰すること（第5節）／ $4\pi^2$ の 2π が根Bであること（第6節）／殻定理（第7節）。

示さないこと（禁欲）： $\sqrt{a^3}$ が次元削減であること——指数は次元ではない／時間が「描画処理ラグ」であること——命名であって導出ではない／ $3/2$ が3次元を選ぶこと——族の $d = 3$ 成員にすぎない／ガウス流束とベルトランの統合——独立な二定理の交差は署名である／ケプラー第三法則についての新事実／ π の消失に意味を読み取らない（強制≠選択）／新しい物理法則・予言なし（第2層）。

主結果は変わっていない。 $M = G = 4\pi$ を採れば $4T^2 = a^3$ と書け、この約分は正しい。

第3版が加えたのは、単位の選択で消えなかった唯一のもの — 指数 $3/2$ の身元である。それは次元ではない。フラクタル次元でも位相次元でもなく、動力学のスケーリング指数という別の圏に属する。そして $1 + \frac{1}{2}$ 、すなわち「道のりが伸びること」と「遅くなること」の合成であり、 d 次元では $d/2$ になる族の一員にすぎない。

だが、この指数には出所がある。逆二乗則は3次元のガウスの流束から強制されるのだから、**3/2**はポアソン方程式の 4π と同じ根をもつ。 $4T^2 = a^3$ という一本の式は、選ばなかった指数と、選んだ係数を、同時に含んでいる。

改訂記録

第3版 (2026年8月)：題名から「描画ラグ」を外し山岸・ケプラー方程式とした（第2版で撤回済みの解釈を題名が名乗り続けていたため。DOI・レコードは同一）。副題を指数 **3/2** の身元に改めた。指数 **3/2** が次元ではなくスケーリング指数であることを論文94の仕分けに接続し、初版の誤りを圏の取り違えとして名指した（第3節）。一般の冪法則 $T \propto a^{(1-n)/2}$ を導き、二体問題の直接数値積分により **3/2** を確認した（4.1–4.2節）。 d 次元では $T \propto a^{d/2}$ ゆえ **3/2** は次元を選ばないこと（論文114）、およびその根がポアソンの 4π と同じ「事実」の側であること（論文35第3版）を示した（4.3–4.4節）。ベルトランの定理と隠れた $SO(4)$ （論文79）によりケプラー問題の特別さを位置づけ、ガウス流束とベルトランが別根であることを明示した（第5節）。 $4\pi^2$ の 2π が論文18第3版の根Bであることを点呼した（第6節）。主結果 $4T^2 = a^3$ と殻定理の節は変更していない。

第2版 (2026年7月)： $\sqrt{a^3}$ を「3次元を2次元へ次元削減する操作」とし時間を「描画処理ラグ」とする解釈を撤回した（平方根は指数を半分にする操作であって1つ下げる操作ではない）。指数 **3/2** の由来を円軌道の力学（ $1 + \frac{1}{2}$ ）として示した。「遠方天体の内部構造は実質的に計算に入らない」という着想の対応物が殻定理であることを記した。初版：Zenodo 10.5281/zenodo.21430531。

参考文献

1. Kepler, J. (1619). *Harmonices Mundi*. Linz.
2. Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. London.
3. Bertrand, J. (1873). *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*. C. R. Acad. Sci. Paris 77.
4. 山岸勇輝 (2026). $n = 2$ 唯一性定理 [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
5. 山岸勇輝 (2026). 古典力学再定式化 [論文26]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21601339
6. 山岸勇輝 (2026). 万有引力定数解凍理論（第3版） [論文35]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430118
7. 山岸勇輝 (2026). 古典物理学マスタ帳（第3版） [論文38]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430234
8. 山岸勇輝 (2026). 運動エネルギー方程式（第3版） [論文18]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430706
9. 山岸勇輝 (2026). ラプラス・ルンゲ・レンツと隠れた $SO(4)$ [論文79]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732820
10. 山岸勇輝 (2026). $T \cdot M$ 上のネーター [論文80]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21732957
11. 山岸勇輝 (2026). フラクタル次元 [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581

12. 山岸勇輝 (2026). 四次元にいることを知る対象 [論文114]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21963544
13. 山岸勇輝 (2026). 必然性の根 [論文86]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21744839
14. 山岸勇輝 (2026). 王道の総覧 [論文100]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758864
15. 山岸勇輝 (2026). エディントンの戒め [論文101]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836382

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)