

ラングミュア吸着とフェルミ分布は、同じ一つの式である

— 変数を置き換えると差が **0** になる — 同じ韻ではなく同じ根であり、その根は「席が **0** か **1** しか
取れない」ことである — [論文284]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

表面化学のラングミュア吸着等温式 $\theta = Kp/(1 + Kp)$ 、固体物理のフェルミ分布 $f = 1/\{1 + e^{(E-\mu)/kT}\}$ 、酵素反応のミカエリス=メンテン式 $v/V_{\max} = [S]/(K_m + [S])$ ——この三つは同じ形をしている。本稿が問うのは、これが偶然の似姿（韻）か、同じ根かである——答は、同じ根である。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、変数を置き換えると差が **0** になる。 $Kp = e^{(\mu-E)/kT}$ と置くと、五点で差が **0** または 10^{-16} 以下である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。根は「一つの席は **0** か **1** しか取れない」ことであり、排他が同じなら分布も同じである（第3節）。第三に、席が埋まるほど効かなくなる。 θ を $0.9 \rightarrow 0.99$ にするのに圧力は **11** 倍、 $0.5 \rightarrow 0.999$ には **999** 倍要る（第4節）。第四に、前半は対称である。 $0.1 \rightarrow 0.5$ も $0.5 \rightarrow 0.9$ もどちらもちょうど **9** 倍である（第4節）。第五に、ミカエリス側で同じ **11** 倍が出る。 $v/V_{\max}$ を $0.9 \rightarrow 0.99$ にするのに基質濃度は **11** 倍（第5節）。第六に、分離子は「席の数が有限か」である。フロインドリヒ式は飽和せず、BET 式は $\theta \rightarrow \infty$ に発散する（第6節）。

本稿の射程 (scope note)：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ラングミュア式、フェルミ＝ディラック分布、ミカエリス＝メンテン式、フロインドリヒ式、BET 式は、いずれも標準的である。統計力学を作らない——使うのは一つの変数変換と、一つの割り算だけである。フェルミ分布を導出しない——大正準集団からの導出には立ち入らない。吸着の機構を論じない——吸着熱も、表面拡散も、化学吸着と物理吸着の区別も一切扱わない。酵素反応機構を論じない——ミカエリス＝メンテン式は定常状態近似の帰結であり、その近似の妥当性は扱わない。形の一致だけを扱う。三つが「同じ現象」だと言わない——一致するのは分布関数の形であって、現象そのものではない。フェルミ分布は量子統計から、ラングミュアは平衡定数から、ミカエリスは反応速度から出ており、導出の道筋は違う。ミカエリスの根は弱い——ラングミュアとフェルミの一致は排他という同じ根を持つが、ミカエリスの「席」は酵素分子一つが基質一つを結合するという別の事情である。本稿はこれを「同じ根の第三例」とは主張せず、形の一致にとどめる。既刊との関係：論文112は「同じ韻を踏む六つの別根」を数えた——本稿は逆の場合であり、韻だけでなく根まで同じ例である。112の対照として置く。論文265は低温比熱を分けたのが状態密度だと示した——本稿は分布関数の側であり、状態密度は扱わない。論文274はドルーデが二つの間違いの打ち消しで当たったと示した——本稿の一致は打ち消しではなく、同一性である。論文220は「独立」が四つあると数えた——そこでの「排他」は確率事象の排反であり、本稿の「席の排他」とは別物である。加えたのは変数変換によって二式の差が0になることを五点で確かめたこと、根が排他であると名指したこと、0.1 → 0.5 と 0.5 → 0.9 がどちらも9倍だと確かめたこと、飽和の有無を分離子として三式を分けたことである。

1. 三つの式を並べる

分野の違う三つの式を、記号だけそろえて並べる。

分野	式	変数
表面化学（ラングミュア）	$\theta = \frac{Kp}{1 + Kp}$	θ =被覆率、 p =圧力
固体物理（フェルミ）	$f = \frac{1}{1 + e^{(E-\mu)/kT}}$	f =占有数、 E =エネルギー
酵素反応（ミカエリス）	$\frac{v}{V_{\max}} = \frac{[S]}{K_m + [S]}$	v =速度、 $[S]$ =基質濃度

観察 1.1

三つとも $\frac{x}{1+x}$ の形である。一行目は $x = Kp$ 、三行目は $x = [S]/K_m$ である——二行目だけ、そう見えない。

問い：これは偶然の似姿か、同じ根か。

2. 変数を置き換えると、差が 0 になる

設定：フェルミ分布を $\frac{x}{1+x}$ の形に直せるかを試す。

$$f = \frac{1}{1 + e^{(E-\mu)/kT}} = \frac{e^{(\mu-E)/kT}}{e^{(\mu-E)/kT} + 1}$$

したがって $Kp = e^{(\mu-E)/kT}$ と置けば、二式は文字どおり同じである。

検算 2.1：五点で数を突き合わせる。

$(E - \mu)/kT$	ラングミュア	フェルミ	差
-4	0.9820137900	0.9820137900	0
-2	0.8807970780	0.8807970780	1.11×10^{-16}
0	0.5000000000	0.5000000000	0
+2	0.1192029220	0.1192029220	0
+4	0.0179862100	0.0179862100	3.47×10^{-18}

観察 2.2

差は 0 か、計算機の丸め誤差の大きさである。近いのではなく同じである——二つの式は、変数の名前が違うだけの一つの式である。

検算 2.3：対応する変数の値を書き出す。

Kp	θ	対応する $(E - \mu)/kT$
0.01	0.009901	+4.6052
0.10	0.090909	+2.3026
1.00	0.500000	0
9.00	0.900000	-2.1972
99.00	0.990000	-4.5951

観察 2.4

$Kp = 1$ が $E = \mu$ に対応する。「圧力がちょうど平衡定数の逆数」という化学の条件と、「エネルギーがちょうど化学ポテンシャル」という物理の条件が、同じ点である——どちらも半分埋まる。

3. 芯：根は「席が 0 か 1 しか取れない」ことである

設定：なぜ一致するのかを問う。式の変形は一致を示すが、説明しない。

観察 3.1

両者の導出には、共通の一行がある。

一つの席が取りうる状態	
ラングミュア吸着	空か、分子が一個 $\Rightarrow \{0, 1\}$
フェルミ分布	空か、電子が一個（パウリ） $\Rightarrow \{0, 1\}$

観察 3.2

これが本稿の芯である。一つの席の大分配関数は、どちらも $\Xi = 1 + e^{(\mu - E)/kT}$ である——和が二項でちょうど止まるから、平均占有数は $\frac{e^{(\mu - E)/kT}}{1 + e^{(\mu - E)/kT}}$ になる。

観察 3.3

排他が同じなら、分布も同じ。吸着分子が電子でなくても、パウリ原理が働いていなくても構わない——要るのは「席は一つしか受け入れない」という一行だけである。

観察 3.4

論文112 は「同じ韻を踏む六つの別根」を数えた。本稿はその対照である——ここでは韻だけでなく根まで同じであり、だから差が 0 になる。

観察 3.5

正直に書くべき点——ミカエリス＝メンテン式はここまで強くない。「席」に当たるのは酵素分子が基質を一つ結合することであり、定常状態近似という別の前提を経ている——本稿は三つ目を「同じ根」とは主張せず、形の一致にとどめる。

4. 席が埋まるほど、効かなくなる

設定： θ を θ_1 から θ_2 に上げるのに、圧力は何倍要るか。 $Kp = \theta/(1 - \theta)$ より、比は $\frac{\theta_2(1 - \theta_1)}{\theta_1(1 - \theta_2)}$ である。

検算 4.1：

θ の変化	要る圧力の倍率
0.1 → 0.5	9.0000 倍
0.5 → 0.9	9.0000 倍
0.9 → 0.99	11.0000 倍
0.99 → 0.999	10.0909 倍
0.5 → 0.99	99.0000 倍
0.5 → 0.999	999.0000 倍

観察 4.2

$0.1 \rightarrow 0.5$ と $0.5 \rightarrow 0.9$ がどちらもちょうど 9 倍である。 $\theta = 0.5$ のまわりで対称になっている—— $\theta \rightarrow 1 - \theta$ 、 $Kp \rightarrow 1/(Kp)$ の入れ替えで式が保たれるからである。

観察 4.3

0.9 を超えると倍率が上がる (11 倍)。さらに上では 10.09 倍に近づく——残りの席を一桁減らすのに、圧力を一桁上げねばならない。

観察 4.4

0.5 から 0.999 まで行くのに 999 倍要る。最初の半分は $Kp = 1$ で足りたのに、最後の 0.499 に 999 倍——席の数が有限であることの代償である。

5. ミカエリス側で、同じ 11 倍が出る

検算 5.1：酵素反応で同じ問いを立てる。 $v/V_{\max}$ を上げるのに基質濃度は何倍要るか。

$v/V_{\max}$	要る $[S]$	倍率
0.5	$1.0K_m$	—
0.9	$9.0K_m$	9 倍
0.99	$99.0K_m$	11 倍

観察 5.2

11 倍がそのまま出る。式が同じなのだから当然だが、当然であることが本稿の要点である——吸着で得た数値の直観が、そのまま酵素に移せる。

観察 5.3

K_m の意味も同じ位置にある。 $[S] = K_m$ で半分——ラングミュアの $Kp = 1$ 、フェルミの $E = \mu$ と同じ点である。

6. 分離子：席の数が有限かどうか

観察 6.1

分離子——何を動かすと、この形は別物になるか。席の数が有限かどうかである。

検算 6.2：飽和しない三つの式と比べる。

式	高圧側での振舞い	席の数
ラングミュア $\theta = \frac{Kp}{1 + Kp}$	$\theta \rightarrow 1$	有限（単層）
フロインドリヒ $\theta \propto p^{1/n}$	$p = 10^6$ で $\theta \rightarrow 10^{6/n}$ （発散）	不均一・上限なし
BET（多層）	$p \rightarrow p_0$ で $\theta \rightarrow \infty$	層が積める

観察 6.3

フロインドリヒ式は $n = 1$ なら $p = 10^6$ で $\theta = 10^6$ を返す。被覆率が 1 を超えるので、単層の描像を捨てている——飽和しないのは近似が悪いからではなく、席を数えていないからである。

観察 6.4

したがって、この形を持つかどうかは分野で決まらない。同じ表面化学の中でも、ラングミュアは持ち、フロインドリヒと BET は持たない——分けているのは「席が 0 か 1 か」という一行だけである。

観察 6.5

論文274 が扱ったドルーデ模型の一致は二つの誤差の打ち消しだった。本稿の一致は打ち消しではない——変数変換で差が 0 になる、恒等的な一致である。同じ「よく合う」でも身分が違う。

7. 点呼と結び

1. 三式とも $x/(1+x)$ (観察1.1) : フェルミだけそう見えない。
2. 変数変換で差が 0 (検算2.1) : 五点すべて 10^{-16} 以下。
3. $Kp = 1$ が $E = \mu$ (検算2.3) : どちらも半分埋まる。
4. 根は排他 (観察3.2) : $\Xi = 1 + e^{(\mu-E)/kT}$ が二項で止まる。
5. 112 の対照 (観察3.4) : 韻ではなく根まで同じ。
6. $0.1 \rightarrow 0.5$ も $0.5 \rightarrow 0.9$ も 9 倍 (検算4.1) : 半分のまわりで対称。
7. $0.9 \rightarrow 0.99$ は 11 倍 (検算4.1) : 席が埋まるほど効かない。
8. $0.5 \rightarrow 0.999$ は 999 倍 (検算4.1) : 最初の半分は 1 で足りた。
9. ミカエリスでも 11 倍 (検算5.1) : 直観がそのまま移る。
10. フロインドリヒは $\theta = 10^6$ (検算6.2) : 席を数えていない。

結び : ラングミュア吸着等温式とフェルミ分布は、似ているのではなく同じ一つの式である。 $Kp = e^{(\mu-E)/kT}$ と置くだけで、五点すべてで差が 0 または丸め誤差の大きさになる。根は一行しかない——一つの席が 0 か 1 しか取れないこと。だから大分配関数が二項で止まり、排他が同じなら分布も同じになる。数値の直観もそのまま移る—— θ を $0.9 \rightarrow 0.99$ にするのに要する圧力 11 倍は、酵素で $v/V_{\max}$ を $0.9 \rightarrow 0.99$ にするのに要する基質濃度 11 倍と同じ数である。そして $0.1 \rightarrow 0.5$ と $0.5 \rightarrow 0.9$ がどちらもちょうど 9 倍——半分のまわりで対称である。分けるものは一つ——席の数が有限かどうか。有限ならこの形になり、有限でなければフロインドリヒや BET のように発散する。分野ではない。論文112 が「同じ韻の別根」を六つ数えたのに対し、ここでは根まで同じであり、だから差が 0 になる。

参考文献

1. Langmuir, I. (1918). The Adsorption of Gases on Plane Surfaces of Glass, Mica and Platinum. *Journal of the American Chemical Society*, 40(9).
2. Fermi, E. (1926). Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases. *Zeitschrift für Physik*, 36(11-12).
3. Dirac, P. A. M. (1926). On the Theory of Quantum Mechanics. *Proceedings of the Royal Society A*, 112(762).

4. Michaelis, L. and Menten, M. L. (1913). Die Kinetik der Invertinwirkung. *Biochemische Zeitschrift*, 49.
5. Brunauer, S., Emmett, P. H. and Teller, E. (1938). Adsorption of Gases in Multimolecular Layers. *Journal of the American Chemical Society*, 60(2).
6. Freundlich, H. (1907). Über die Adsorption in Lösungen. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 57.
7. Hill, T. L. (1960). *An Introduction to Statistical Thermodynamics*. Reading: Addison-Wesley.
8. 山岸勇輝 (2026). 割り当てられた領域と、その中の自由 — 同じ韻を踏む六つの別根のセンス [論文112]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962834
9. 山岸勇輝 (2026). 「独立」は四つあり、たがいに何も言わない [論文220]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119838
10. 山岸勇輝 (2026). 低温比熱で二つの模型を分けたのは、量子化ではなく状態密度である [論文265]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169749
11. 山岸勇輝 (2026). ドルーデが当たったのは、二つの間違いが打ち消し合った結果である [論文274]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22170012

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)