

連続無限の誤りを離散にしているのは、符号ではなく測定である

— 8つの実パラメータが4通りに落ちる — 距離3の符号が直せるのは262144個のうち28個、すなわち 1.07×10^{-4} にすぎない — [論文287]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

量子ビットに入る誤りは連続無限にある。それを有限個の符号で訂正できるのは、なぜか。本稿が問うのは、離散化しているのは誰かである——答は、符号ではなく測定である。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、一量子ビットの誤りを数える。 $E = c_0I + c_1X + c_2Y + c_3Z$ には実パラメータが8つあり、連続無限である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。測定がそれを I, X, Y, Z の4通りに射影する——離散にしているのは測定であって、符号ではない（第2節）。第三に、 X と Z を直せば Y も直る。 $Y = iXZ$ だから、独立に直すべきは2種類だけである（第3節）。第四に、符号が直せるのはごく一部である。9量子ビットのパウリ演算子 $4^9 = 262144$ 個のうち、距離3が直すのは28個、割合は 1.068×10^{-4} （第4節）。第五に、表面符号では3.24倍で100分の一である。 $d = 5 \rightarrow 9$ 、物理量子ビット $25 \rightarrow 81$ で論理誤り率 $10^{-3} \rightarrow 10^{-5}$ （第5節）。第六に、分離子は「射影があるか」である。古典符号には射影が要らない——誤りが最初から離散だからである（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——誤りの離散化、パウリ基底、安定符号、表面符号、閾値定理は、いずれも標準的である。符号を作らない——数えるのはパラメータの個数と、誤りの個数だけである。閾値定理を証明しない—— $p_{th} \approx 10^{-2}$ という値は数値として引くのみである。論理誤り率の式を導出しない—— $(p/p_{th})^{(d+1)/2}$ は漸近形の目安であり、定数因子を無視している。第5節の値は「桁」であって予言値ではない。表面符号の実装を論じない——格子の形も、測定回路も、デコーダも一切扱わない。物理量子ビット数 $\approx d^2$ は最も単純な見積りである。相関誤りを扱わない——第4節の数え上げは独立な単一量子ビット誤りを仮定している。相関があれば重み 1 の枠から外れる。 1.068×10^{-4} を悲観的に読まない——これは全パウリ演算子に対する割合であって、実際に起きる誤りに対する割合ではない。起きやすい誤りが重み 1 に集中していれば実用上は十分である。本稿はどちらが実際かを主張しない。兄弟編について：論文281 は同じ量子誤り訂正を扱い、シンジロームが誤りについて 8 ビット・状態について 0 ビット語ることを数えた——根は同じ（測定が状態を壊さない）だが、問いが違う。あちらは測定が何を取らないか、本稿は測定が何を離散にするかである。読者は両方を並べて読むことを勧める。既刊との関係：論文163 は「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」を分けた——本稿は構成された符号が実際に何個の誤りを覆うかを数える。論文179 は「構成できない」に別根があると示した——本稿の $d = 4$ 不可も数え上げが根である。論文252 は「情報量」が四つあると数えた——本稿は連続なパラメータと離散な結果を分ける。論文269 は結晶が禁じるのが周期性だと示した——本稿の離散化も構造が課すものである。加えたのは一量子ビットの誤りが実パラメータ 8 つで、測定後に 4 通りになると数えたこと、 $4^9 = 262144$ に対して距離 3 が覆うのが 28 個 $\cdot 1.068 \times 10^{-4}$ だと計算したこと、表面符号で 3.24 倍が 100 分の一に対応すると確かめたこと、古典との差を「射影が要るかどうか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：一量子ビットに入る誤りは、 2×2 の行列 E で表される。パウリ行列を基底に取れば

$$E = c_0 I + c_1 X + c_2 Y + c_3 Z$$

と書ける。

問い： c_i は連続に動く。それでも有限個の誤りしか直せない符号で訂正できるのは、なぜか。

観察 1.1

よくある説明は「符号が誤りを離散化する」である。本稿はこれを正確でないと見る——離散化しているのは測定である。

2. 芯：8 つの実パラメータが 4 通りに落ちる

検算 2.1：測定の前後で、誤りの自由度を数える。

誤りの種類		個数・次元
測定前	$c_0I + c_1X + c_2Y + c_3Z$	実パラメータ 8 つ（連続無限）
測定後	I または X または Y または Z	4 通り（離散）

観察 2.2

これが本稿の芯である。符号は何も離散化していない——シンドローム測定が、状態を四つの枝のどれか一つに射影する。そのあとに残っているのは一つのパウリ誤りであり、それを打ち消せばよい。

観察 2.3

したがって「連続が離散になる」のは測定のしわざである。同じ射影が、論文281 では状態について 0 ビットしか取らないという形で現れた——同じ一つの測定が、二つの働きをしている。

検算 2.4： n 量子ビットに広げる。

n	パウリ演算子 4^n	測定前の実パラメータ $2 \cdot 4^n$
1	4	8
5	1024	2048
7	16384	32768
9	262144	524288

観察 2.5

$n = 9$ でも、測定後に残るのは 262144 通りの離散な誤りである。524288 次元の連続空間が、有限集合に落ちている——この落下だけが、訂正を可能にしている。

3. X と Z を直せば、 Y も直る

観察 3.1

パウリ行列には $Y = iXZ$ という関係がある。したがって X 型の誤りと Z 型の誤りを別々に直せる符号は、 Y 型も自動的に直る——3 種類ではなく 2 種類を直せばよい。

観察 3.2

ショアの 9 量子ビット符号がこの形をしている。三個ずつの束で位相反転 (Z) を、束の中でビット反転 (X) を直す—— 3×3 という構造は、2 種類を別々に扱うためのものである。

観察 3.3

ここが古典符号と違う点である。古典では誤りはビット反転の一種類しかない——位相という自由度が無いからである。

検算 3.4：同じ距離の古典符号と量子符号で、直すべき誤りの数を比べる。

符号	n	誤りの種類	訂正すべき誤りの数
古典ハミング [7,4,3]	7	ビット反転のみ	$1 + n = 8$
量子 [[7,1,3]] (ステイン)	7	X 、 Y 、 Z	$1 + 3n = 22$
比			2.75 倍

観察 3.5

同じ $n = 7$ 、同じ距離 3 で、量子符号は 2.75 倍の誤りを覆わねばならない。それでも $k = 1$ が取れる——古典の $k = 4$ と比べて、埋め込める情報が 4 分の一に減っている。

4. 符号が直せるのは、 1.068×10^{-4} にすぎない

設定：距離 d の符号は重み $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ 以下のパウリ誤りを直す。その個数は $\sum_{k=0}^t \binom{n}{k} 3^k$ である。

検算 4.1：

d	t	物理量子ビット n	直せる誤りの数	4^n に占める割合
3	1	9	28	1.068×10^{-4}
5	2	25	2776	2.466×10^{-12}
7	3	49	508180	1.604×10^{-24}
9	4	81	137095984	2.345×10^{-41}

観察 4.2

9 量子ビットのパウリ誤りは **262144** 通りあり、距離 3 の符号が直せるのは **28** 通りだけである。割合は 1.068×10^{-4} ——符号は、ほとんどの誤りを直せない。

観察 4.3

しかも符号を大きくすると、割合は急速に下がる。 $d = 9$ では 2.345×10^{-41} ——直せる誤りの数は増えるのに、全体に占める割合は 10^{37} 分の一に落ちる。

観察 4.4

正直に書くべき点——この数を悲観的に読んではいけない。これは全パウリ演算子に対する割合であって、実際に起きる誤りに対する割合ではない——物理的な誤りが重み 1 のあたりに集中していれば、28 個で足りる。

観察 4.5

したがって符号が前提しているのは「誤りが疎である」ことである。相関誤りが入れば、この仮定は破れる—— 1.068×10^{-4} という数は、その仮定の重さを示している。

5. 表面符号：3.24 倍で 100 分の一

設定：表面符号は物理量子ビット数がおおよそ d^2 で、論理誤り率が $(p/p_{th})^{(d+1)/2}$ に従う。 $p = 10^{-3}$ 、 $p_{th} = 10^{-2}$ とする。

検算 5.1：

d	物理量子ビット d^2	論理誤り率
3	9	1.000×10^{-2}
5	25	1.000×10^{-3}
7	49	1.000×10^{-4}
9	81	1.000×10^{-5}
11	121	1.000×10^{-6}

検算 5.2：代償を比で書く。

d の変化	物理量子ビットの倍率	論理誤り率の倍率
3 → 5	2.7778	1/10
5 → 9	3.2400	1/100
3 → 9	9.0000	1/1000
9 → 11	1.4938	1/10

観察 5.3

物理量子ビットを **3.24** 倍にすると、論理誤り率が **100** 分の一になる。三倍の資源で二桁——多項式の代償で指数の利得であり、これが閾値定理の中身である。

観察 5.4

ただし $p < p_{th}$ でなければならない。 $p > p_{th}$ なら $(p/p_{th}) > 1$ となり、 d を上げるほど悪くなる——同じ式が、閾値の両側で向きを変える。

観察 5.5

正直に書くべき点—— $(p/p_{th})^{(d+1)/2}$ は定数因子を落とした漸近形である。第5節の値は「桁」であって、実機の予言ではない。

6. 分離子：射影が要るかどうか

観察 6.1

分離子——何を動かすと、離散化の必要が消えるか。誤りが最初から離散であることである。

	誤りの空間	離散化
古典符号	$\{0,1\}^n$ （最初から離散）	不要
量子符号	$2^n \times 2^n$ 行列（連続）	測定による射影が要る

観察 6.2

古典符号では、誤りはビットが反転したかどうかであり、中間が無い。量子では振幅がわずかにずれるという誤りがある——「わずかにずれた」を直すことはできないが、測ってしまえば「ずれた」か「ずれていない」かになる。

観察 6.3

これは論文269 の構図と似ている。あちらでは周期性という構造が、許される対称性を離散な五つに絞った——ここでは測定という操作が、連続な誤りを離散な四つに絞る。どちらも、絞っているのは対象そのものではない。

観察 6.4

論文163 は「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」を分けた。本稿は構成された符号について、それが実際に何を覆うかを数えた——**262144** 個のうち **28** 個であり、存在の証明では見えない数である。

7. 点呼と結び

1. 一量子ビットの誤りは実パラメータ **8** つ (検算2.1) : 連続無限。
2. 測定後は **4** 通り (検算2.1) : 離散化は測定のしわざ。
3. $n = 9$ で $4^9 = 262144$ (検算2.4) : **524288** 次元が有限集合に落ちる。
4. $Y = iXZ$ (観察3.1) : 独立に直すのは **2** 種類。
5. 古典 **8** 対 量子 **22** (検算3.4) : **2.75** 倍。
6. 距離 **3** が直すのは **28** 個 (検算4.1) : 1.068×10^{-4} 。
7. $d = 9$ では 2.345×10^{-41} (検算4.1) : 割合は下がる。
8. $d = 5 \rightarrow 9$ で **3.2400** 倍 (検算5.2) : 論理誤り率 **1/100**。
9. $p > p_{th}$ なら逆向き (観察5.4) : 同じ式が向きを変える。
10. 古典に射影は要らない (観察6.1) : 最初から離散だから。

結び : 量子誤り訂正でよく言われる「連続な誤りが離散化される」は正しい。ただし離散化しているのは符号ではなく、測定である。一量子ビットの誤りには実パラメータが **8** つあり、連続無限であるが、シンδροーム測定が I, X, Y, Z の **4** 通りに射影する——そのあとに残るのは一つのパウリ誤りであり、打ち消せばよい。

$Y = iXZ$ なので、独立に直すべきは **2** 種類である。一方で、符号が覆う範囲は狭い——**9** 量子ビットのパウリ誤り **262144** 通りのうち、距離 **3** が直せるのは **28** 通り、 1.068×10^{-4} にすぎない。それでも動くのは誤りが疎だという仮定が効いているからである。そして代償は多項式で済む——物理量子ビットを **3.24** 倍にすると、論理誤り率が **100** 分の一になる。分けるものは一つ——誤りが最初から離散か、射影を要するか。古典符号に射影は要らない。量子符号では、測ることが訂正の前提であり、測ることが状態を壊さないという別の事実が、それを可能にしている。

参考文献

1. Shor, P. W. (1995). Scheme for Reducing Decoherence in Quantum Computer Memory. *Physical Review A*, 52(4).
2. Steane, A. M. (1996). Error Correcting Codes in Quantum Theory. *Physical Review Letters*, 77(5).
3. Knill, E. and Laflamme, R. (1997). Theory of Quantum Error-Correcting Codes. *Physical Review A*, 55(2).

4. Kitaev, A. Y. (2003). Fault-Tolerant Quantum Computation by Anyons. *Annals of Physics*, 303(1).
5. Fowler, A. G., Mariantoni, M., Martinis, J. M. and Cleland, A. N. (2012). Surface Codes: Towards Practical Large-Scale Quantum Computation. *Physical Review A*, 86(3).
6. Aharonov, D. and Ben-Or, M. (1997). Fault-Tolerant Quantum Computation with Constant Error. In *Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*.
7. Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press.
8. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
9. 山岸勇輝 (2026). 複製できないのに、訂正はできる [論文281]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171058
10. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419
11. 山岸勇輝 (2026). 「情報量」は四つあり、要るものが違う [論文252]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22161148
12. 山岸勇輝 (2026). 結晶が禁じているのは対称性ではなく、周期性である [論文269]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169855

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)