

「どれが速いか」には三つの答があり、三つとも別の方法が勝つ

— 反復回数ならニュートン **5** 回、関数評価数なら割線法 **7** 個、最初の一步の桁あたりでは二分法

— $x^3 - 2 = 0$ を実際に解いて確かめる — [論文288]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

方程式を数値で解く方法には、ニュートン法・割線法・二分法がある。「どれが速いか」と問えば、ふつうニュートン法と答える。本稿が問うのは、「速い」の定義を変えると答が変わるかである——答は、三通りに変わる。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、実際に $x^3 - 2 = 0$ を解く。**16** 桁に達するまで、ニュートンは **5** 回、割線法は **7** 回、二分法は **53** 回（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。関数評価の総数で数えると、割線法 **7** 個 < ニュートン **10** 個——勝敗が逆転する（第3節）。第三に、効率指数がそれを予言する。 $p^{1/m}$ はニュートン **1.414214**、割線法 **1.618034**——割線法が **14.41%** 速い（第3節）。第四に、三つ目の逆転がある。最初の一步の桁あたり評価数では、二分法 **3.3219** < ニュートン **3.6430**（第4節）。第五に、黄金比がここに立つ。割線法の収束次数は $p^2 = p + 1$ の正根 $\varphi = \mathbf{1.618034}$ である（第5節）。第六に、分離子は「何を一単位と数えるか」である。反復か、関数評価か、微分の有無か——方法の性質ではなく、数え方の規約が答を決めている（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ニュートン法の二次収束、割線法の φ 次収束、二分法の線形収束、効率指数 $p^{1/m}$ は、いずれも標準的である。数値解析を作らない——使うのは一つの方程式と、三つの反復だけである。収束次数を証明しない—— $p=2$ も $p=\varphi$ も引くだけであり、誤差漸化式の導出には立ち入らない。一般の方程式を主張しない—— $x^3-2=0$ は単根・滑らか・良条件であり、最も都合のよい場合である。重根では二次収束が線形に落ちるし、初期値が悪ければニュートンは発散する。回数の値を主張しない——第2節の $5 \cdot 7 \cdot 53$ はこの初期値・この方程式・この停止条件での実測である。初期値を変えれば ± 1 動く。評価コストが等しいと仮定している—— f と f' の計算量が同じだと置いた。実際には f' のほうが高いことも安いこともあるので、第3節の逆転はこの仮定に依存する。二分法を貶めない——二分法は唯一、収束が保証されている。速さの比較は、収束するという前提の上でのみ意味を持つ。黄金比の一致を主張しない——第5節の φ と論文269の $1/\varphi$ はどちらも $x^2 = x + 1$ から出るが、現象として関係があるとは主張しない。既刊との関係：論文257は「速さ」を変えても「行き先」は変わらないと示した——本稿は「速さ」の定義そのものが三通りある場合である。論文255は「精度」が二つあり較正で消えるのは一方だけだと分けた——本稿も一語の下の複数の量を扱う。論文269は結晶の5回対称が $2 \cos 72^\circ = 1/\varphi$ で禁じられることを示した——本稿の φ は同じ二次方程式の根である。論文159は「不適切」が一語でないこと示した——本稿は「速い」が一語でないことを示す。加えたのは $x^3-2=0$ を三つの方法で実際に解いて反復回数と評価数を数えたこと、評価数で勝敗が逆転すると確かめたこと、桁あたり評価数を各段で計算し、最初の一步では二分法が勝つという三つ目の逆転を見たこと、 φ と $1/\varphi$ が同じ二次方程式から出ると記録したことである。

1. 三つの方法と、三つの「速さ」

三つの反復法を並べる。

方法	反復式	一回あたりの関数評価
ニュートン法	$x \leftarrow x - f(x)/f'(x)$	2 個 (f と f')
割線法	$x \leftarrow x - \frac{f(x)(x - x_0)}{f(x) - f(x_0)}$	1 個 (f のみ)
二分法	区間を半分にする	1 個

観察 1.1

「速い」の定義が三つありうる。

定義	何を一単位と数えるか
(a) 反復回数	反復を一単位
(b) 関数評価の総数	関数を一回呼ぶことを一単位
(c) 桁あたりのコスト	1 桁の精度を一単位

問い：三つの定義で、勝者は同じか。

2. 実際に解く：5 回・7 回・53 回

設定： $x^3 - 2 = 0$ 、根は $2^{1/3} = 1.259921049894873$ 。相対誤差が 10^{-16} を切るまで回す。

検算 2.1：ニュートン法（初期値 $x = 1$ ）。

回	x	正しい桁
0	1.0000000000000000	0.686
1	1.3333333333333333	1.235
2	1.2638888888888888	2.502
3	1.2599334934499771	5.005
4	1.2599210500177698	10.011
5	1.2599210498948732	16.000

観察 2.2

桁が 0.686 → 1.235 → 2.502 → 5.005 → 10.011 とほぼ倍々になっている。これが二次収束である——一回ごとに正しい桁数が二倍になる。

検算 2.3：割線法（初期値 $x_0 = 1$ 、 $x_1 = 1.5$ ）。

回	x	正しい桁
1	1.2105263157894737	1.407
2	1.2514085388756730	2.170
3	1.2602652758390120	3.563
4	1.2599187140887995	5.732
5	1.2599210492568176	9.295
6	1.2599210498948743	15.055
7	1.2599210498948732	16.000

観察 2.4

桁が $1.407 \rightarrow 2.170 \rightarrow 3.563 \rightarrow 5.732 \rightarrow 9.295 \rightarrow 15.055$ と、約 1.6 倍ずつ増えている。
 $2.170/1.407 = 1.542$ 、 $3.563/2.170 = 1.642$ 、 $9.295/5.732 = 1.622$ —— $\varphi = 1.618$ のまわりを揺れている。

検算 2.5：二分法（区間 $[1, 2]$ ）。

量	値
一回に得る桁 $\log_{10} 2$	0.301030
10^{-16} に要する回数 $\log_2(1/(10^{-16} \cdot 2^{1/3}))$	52.8175 $\rightarrow$ 53 回

観察 2.6

定義 (a)（反復回数）では ニュートン 5 回が勝つ。割線法 7 回、二分法 53 回——これが「ニュートンが速い」と言われる根拠である。

3. 芯：評価数で数えると、逆転する

設定：ニュートン法は一回に f と f' の二つを評価する。割線法と二分法は一つである。

検算 3.1 :

方法	反復回数	一回の評価数	総評価数
ニュートン法	5	2	10
割線法	7	1	7
二分法	53	1	53

観察 3.2

これが本稿の芯である。反復回数では $5 < 7$ でニュートンが勝ち、総評価数では $7 < 10$ で割線法が勝つ——同じ計算の同じ実行で、勝敗が入れ替わる。

検算 3.3 : 効率指数 $p^{1/m}$ (p は収束次数、 m は一回の評価数) で確かめる。

方法	収束次数 p	m	効率指数 $p^{1/m}$
ニュートン法	2.000000	2	1.414214
割線法	1.618034	1	1.618034
二分法	1.000000	1	1.000000

観察 3.4

効率指数が実測の逆転を予言している。 $1.618034/1.414214 = 1.144123$ 、すなわち割線法は**14.41%** 速い——収束次数が低いほうが、効率では勝つ。

観察 3.5

正直に書くべき点——この逆転は f と f' の評価コストが等しいという仮定に依存する。 f' が解析的に安く求まるならニュートンが勝ち、 f' が数値微分でしか得られないならさらに割線法が勝つ——答は問題ではなく、コスト表が決めている。

4. 三つ目の逆転：最初の一步では二分法が勝つ

設定：定義 (c)、桁あたりの評価数を、各段で計算する。

検算 4.1：ニュートン法（1 反復 = 2 評価）。

段	増えた桁	評価/桁
0 → 1	+0.549	3.6430
1 → 2	+1.267	1.5785
2 → 3	+2.503	0.7990
3 → 4	+5.006	0.3995
4 → 5	+5.989	0.3339

検算 4.2：割線法（1 反復 = 1 評価）。

段	増えた桁	評価/桁
0 → 1	+0.687	1.4556
1 → 2	+0.763	1.3106
2 → 3	+1.393	0.7179
3 → 4	+2.169	0.4610
4 → 5	+3.563	0.2807
5 → 6	+5.760	0.1736

検算 4.3：二分法はどの段でも一定である。

段	増えた桁	評価/桁
すべて	+0.3010	3.3219

観察 4.4

最初の一步を比べる。

	第 1 歩の評価/桁	最終段の評価/桁
ニュートン法	3.6430	0.3339
割線法	1.4556	0.1736
二分法	3.3219	3.3219

観察 4.5

第 1 歩だけを見れば、二分法 **3.3219** がニュートン **3.6430** より安い。超一次収束の方法は最初は遅く、あとで急に速くなる——三つ目の逆転である。

観察 4.6

二分法の欄は上下で同じ数である。線形収束とは桁あたりのコストが永久に変わらないことであり、最初に有利で最後に絶望的になる——最終段ではニュートンの **9.95** 倍、割線法の **19.14** 倍かかる。

観察 4.7

正直に書くべき点——割線法の最後の段（6 → 7）だけ **1.0582** と悪い。これは機械精度に達して伸びしろが無くなったためであり、方法の性質ではない——有効数字が尽きた欄を、速さの証拠に使ってはいけない。

5. 黄金比がここに立つ理由

観察 5.1

割線法の誤差は $e_{n+1} \sim Ce_n e_{n-1}$ を満たす。 $e_n \sim Ae_n^p$ と置いて代入すると、指数は $p^2 = p + 1$ を満たさねばならない——正根が $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618033988749895$ である。

観察 5.2

論文269 は、結晶が 5 回対称を許さない理由が $2 \cos 72^\circ$ が整数でないことだと言った。その値は **0.618033988749895**、すなわち $1/\varphi$ である——数値の差は 1.11×10^{-16} 、機械精度で一致する。

検算 5.3 :

出どころ	値	満たす方程式
割線法の収束次数	$\varphi = 1.618033988749895$	$p^2 = p + 1$
結晶の 5 回対称（論文269）	$2 \cos 72^\circ = 0.618033988749895$	$x^2 = -x + 1 \quad (x = 1/\varphi)$

観察 5.4

正直に書くべき点——本稿はこの一致に意味があるとは主張しない。どちらも整数係数の二次方程式の根であり、そういう数は限られている——同じ数が立つことと、同じ根を持つことは違う（論文112 の区別）。

6. 分離子：何を一単位と数えるか

観察 6.1

分離子——何を動かすと、勝者が変わるか。一単位の定義である。

「速い」の定義	勝者	値
(a) 反復回数	ニュートン法	5 回
(b) 関数評価の総数	割線法	7 個
(c) 最初の一步の桁あたり	二分法	3.3219

観察 6.2

三つの定義で、三つとも別の方法が勝つ。どれも正しい——変わったのは方法ではなく、数え方である。

観察 6.3

論文159 は「不適切」が一語でないを示した。本稿は「速い」が一語でないことを示す——単位を言わずに「速い」と言うことは、数を言わずに「大きい」と言うのに等しい。

観察 6.4

そして四つ目の軸がある——収束するかどうか。二分法は唯一、符号が変わる区間さえあれば必ず収束する——ニュートン法は初期値によっては発散する。速さの比較は、収束するという前提の上でのみ意味を持つ。

7. 点呼と結び

1. ニュートン 5 回（検算2.1）：桁が倍々。
2. 割線法 7 回（検算2.3）：桁が約 1.6 倍ずつ。
3. 二分法 53 回（検算2.5）：一回に 0.301 桁。
4. 総評価数 10 対 7（検算3.1）：逆転する。
5. 効率指数 1.414214 対 1.618034（検算3.3）：14.41% 速い。
6. 第 1 歩は 3.3219 < 3.6430（観察4.4）：二分法が勝つ。
7. 最終段は 3.3219 対 0.3339（観察4.4）：9.95 倍かかる。

8. φ は $p^2 = p + 1$ の正根（観察5.1）：1.618033988749895。

9. $2 \cos 72^\circ = 1/\varphi$ （検算5.3）：差 1.11×10^{-16} 。

10. 三定義で三勝者（観察6.1）：数え方が決める。

結び：「どれが速いか」に答は三つあり、三つとも別の方法が勝つ。 $x^3 - 2 = 0$ を実際に解けば、反復回数ではニュートン **5** 回が勝ち、関数評価の総数では割線法 **7** 個が勝つ——ニュートンは一回に f と f' の二つを要るからである。効率指数 $p^{1/m}$ がそれを予言する——ニュートン **1.414214**、割線法 **1.618034** で、収束次数の低いほうが **14.41%** 速い。そして三つ目の逆転がある——最初の一步だけを見れば、二分法の **3.3219** がニュートンの **3.6430** より安い。超一次の方法は最初が遅く、二分法は桁あたりのコストが永久に一定だからである。ただし最終段では、その一定さが **9.95** 倍の差になる。分けるものは一つ——何を一単位と数えるか。反復か、関数評価か、最初の一步か。三つとも正しく、三つとも別の答を返す。単位を言わずに「速い」と言うのは、数を言わずに「大きい」と言うのに等しい。

参考文献

1. Ostrowski, A. M. (1960). *Solution of Equations and Systems of Equations*. New York: Academic Press.
 2. Traub, J. F. (1964). *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
 3. Householder, A. S. (1970). *The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation*. New York: McGraw-Hill.
 4. Stoer, J. and Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. New York: Springer.
 5. Brent, R. P. (1973). *Algorithms for Minimization Without Derivatives*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
 6. 山岸勇輝 (2026). 割り当てられた領域と、その中の自由——同じ韻を踏む六つの別根のセンス [論文112]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962834
 7. 山岸勇輝 (2026). 「不適切」は一語ではない [論文159]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092229
 8. 山岸勇輝 (2026). 「精度」は二つあり、較正で消えるのは一方だけ [論文255]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22168883
 9. 山岸勇輝 (2026). 「速さ」を変えても「行き先」は変わらない [論文257]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22168985
 10. 山岸勇輝 (2026). 結晶が禁じているのは対称性ではなく、周期性である [論文269]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169855
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)