

山岸・アドラー・バーディーン ノート — カイラル異常の $16\pi^2$ が指数の整数性を与える規格化であることについて — [論文29]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年7月

— From thinking to syncing. —

要 旨

スティーヴン・アドラーおよびウィリアム・バーディーン（1969）によって示された「Adler-Bardeenの定理」は、カイラル異常アノマリーの強さが1ループ計算のみで完全に確定し、2ループ以降の無数の高次ループ輻射補正から一切の修正を受けないという、量子場理論における極めて稀有な現象を記述する。本稿はこの定理に現れる分母 $16\pi^2$ の幾何学的意味を検討する。

【第2版における主要な撤回】：初版は「 $16\pi^2$ に Read-Only 属性が設定されているために高次補正がゼロになる」と主張していたが、これを撤回する。同じ $1/(16\pi^2)$ は4次元場の理論のあらゆる1ループ量に現れる普遍的なループ因子であり、そのほとんど（QCDのベータ関数など）は現に高次補正を受ける。もし $16\pi^2$ が保護を与えるならQCDのベータ関数も1ループ厳密でなければならないが、そうではない。すなわち $16\pi^2$ という値は非繰り込み性の原因ではない（第4節）。あわせて $16\pi^2 = c^2 n$ という同定も次元的に成立しないため撤回する。

【第2版に残るもの】：ただし $16\pi^2$ には別の、より正確な役割がある。 $\int F\tilde{F}/(16\pi^2)$ が整数（巻きつき数・Atiyah-Singer指数）を与えるという意味で、 $16\pi^2$ は指数の整数性を成立させる規格化定数である。非繰り込み性を保証しているのはこの整数性であって $16\pi^2$ の値そのものではないが、両者は無関係でもない。本稿はこの限定された形で主張を残す（第5節）。

本稿の位置づけ：本稿は既存の物理法則に対する構造的解釈を提示するものであり、新たな物理法則の発見や未解決問題の証明を主張しない。単位系についての注記：本稿における $m = 4\pi$ 等の代入は自然単位系の選択である。 G や $\hbar$ は次元を持つ量であり、その数値は単位系に完全に依存する。 $G = 4\pi$ と置けるのは $G = 1$ （幾何単位系）や $G = 6.674 \times 10^{-11}$ (SI) と置けると同じ意味においてであり、どれが「正しい」かを物理が決めるわけではない。したがって本稿が示すのはこの単位系を採ったとき方程式がどう見えるかであって、自然についての新事実ではない。また得られる関係式は自然単位系におけるものであり、SI単位系へ移す際には変換係数を要する。

序論：量子場理論における「繰り込みの嵐」とAdler-Bardeenの奇跡

繰り込み理論と高次ループ補正

量子力学における相互作用の計算（ファインマン・ダイアグラム）では、仮想粒子の生成消滅に伴う量子ループを計算するたびに無限大の発散が発生する。物理学は繰り込みによってこれを補正してきた。

Adler-Bardeen定理の特異性

軸性ベクトル流の不保存を表すカイラル異常（Axial Anomaly）方程式：

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{e^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

においては、1969年にアドラーとバーディーンによって「2ループ以降の高次輻射補正は厳密にゼロである」という性質が証明された：

$$\text{高次補正（2ループ以降）} \implies \Delta\left(\frac{e^2}{16\pi^2}\right) = 0 \quad (\text{Exact})$$

$16\pi^2$ の幾何学的分解

$16\pi^2 = (4\pi)^2$ は $\text{Vol}(S^2 \times S^2) = 4\pi \cdot 4\pi$ に等しい。この算術は正しい（ $4\pi \cdot 4\pi = 157.9137 = 16\pi^2$ ）。

【第2版の注記：他の分解と統合してはならない（誤りパターンC）】

本体系において $16\pi^2$ は複数の文脈で現れるが、それぞれ起源を異にする：

分解	文脈	出典
$\text{Vol}(S^2 \times S^2) = (4\pi)^2$	カイラル異常の規格化	本稿
半径2の S^3 : $2\pi^2 \cdot 2^3$	ホップ分解	論文45
$\Omega_3/(2\pi)^4 \cdot \frac{1}{2}$ の逆数	4次元運動量測度	論文46
$(4\pi)^2 n!$ の $n = 2$ 項	ガウス・ボネ規格化	論文48
$(2\pi) \times (8\pi)$	トカマクのトーラス	論文22

特に注意を要するのは論文45との関係である。半径2の S^3 の体積も $2\pi^2 \cdot 8 = 16\pi^2$ であり数値は本稿と一致するが、 $S^2 \times S^2$ と S^3 は同相ではない。数値的一致は同一性を意味しない（論文48で確立した規律）。統合してはならない。

【第2版】「Read-Only属性」の撤回

初版は本節において、 $16\pi^2 = c^2 n$ を「山岸トールス被覆パッチ」として適用し、

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{e^2}{c^2 n} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (\Delta(c^2 n) \equiv 0)$$

を「山岸・アドラー・バーディーン完全保存定理」として掲げていた。これを撤回する。

反証1： $16\pi^2$ はあらゆる1ループ量に現れる 普遍因子である（決定的）

$1/(16\pi^2)$ は4次元のループ積分測度

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{16\pi^2} = 0.0063326 \dots$$

から生じる一般的なループ因子であり、カイラル異常に固有のものではない。同じ $1/(16\pi^2)$ は、たとえば

- QCDのベータ関数 $\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(11 - \frac{2n_f}{3} \right)$
- 各種の異常次元（anomalous dimension）
- ヒッグス質量の輻射補正（論文47）

にも現れる。そしてこれらはいずれも高次補正を受ける。QCDのベータ関数の2ループ・3ループ・4ループ係数は実際に計算され、非ゼロであることが知られている。

したがって、もし「 $16\pi^2$ が Read-Only だから高次補正がゼロになる」のであれば、QCDのベータ関数も1ループ厳密でなければならない。しかしそうではない。これは初版の主張に対する反例である。 $16\pi^2$ という値は非繰り込み性の原因ではありえない。

反証2： $16\pi^2 = c^2 n$ は次元的に成立しない

$16\pi^2$ は無次元である（ループ因子であるから当然である）。一方 c^2 は $[\mathbf{m}^2/\mathbf{s}^2]$ 、 n は数密度 $[\mathbf{m}^{-3}]$ であり、 $c^2 n$ はいかなる標準的な読み方でも無次元にならない。この同定は撤回する。

反証3：「システムクラッシュ」に対応する物理がない

初版は「 $16\pi^2$ が繰り込まれると位相構造と電荷保存が崩壊し宇宙がクラッシュする」としていた。この記述には対応する計算がない。異常の係数が変われば理論の整合性に影響するのは事実だが、それは異常相殺条件（各世代のフェルミオンの電荷の和がゼロになること）の問題であって、 $16\pi^2$ の値の問題ではない。比喩を機構として提示しており、撤回する。

【第2版】 $16\pi^2$ に残る正しい役割：指数の整数性

以上の撤回にもかかわらず、 $16\pi^2$ には別の、より正確な意味がある。本稿はこれを主張として残す。

カイラル異常を時空全体で積分すると、

$$\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \nu \in \mathbb{Z}$$

すなわち整数（インスタントン数・巻きつき数）が得られる。これはAtiyah-Singerの指数定理の帰結である。

ここで $16\pi^2$ はこの積分が整数になるための規格化定数として働いている。 $16\pi^2$ が「特別」であるとすれば、それは位相的不変量を整数に正規化する係数だからである。

そして非繰り込み性の真の理由も、この整数性にある。指数 ν は整数値しか取れないため、連続的な摂動（高次ループ補正）によって変化しえない。整数は連続変形できないからである。

初版との違いを明確にしておく：

- ・ 初版の主張： $16\pi^2$ という値が保護されている（Read-Only）から高次補正がゼロ。→ 誤り（反例：QCDベータ関数）
- ・ 第2版の主張：非繰り込み性は指数の整数性から来る。 $16\pi^2$ はその整数性を成立させる規格化である。→ 標準的な場の理論の理解と整合する

後者は $16\pi^2$ に位相的な意味を与えるが、 $16\pi^2$ が原因であるとは主張しない。この区別が初版には欠けていた。

射程の明示

- ・ 本稿が示すもの： $16\pi^2 = \text{Vol}(S^2 \times S^2)$ という算術的分解（正しい）。および $16\pi^2$ がカイラル異常の位相的指数を整数に規格化する係数であること（標準的事実の再確認）。
- ・ 本稿が示さないもの：(i) $16\pi^2$ が高次補正ゼロの原因であること（反例により否定された）、(ii) $16\pi^2 = c^2 n$ （次元不整合）、(iii) 「システムクラッシュ」に対応する物理。
- ・ 本稿の性格：独自の結果ではなく、既知の事実（指数定理による非繰り込み性）を本体系の語彙に接続する整理ノートである。題目もそのように改めた。
- ・ $16\pi^2$ ファミリーとの関係：本稿の $\text{Vol}(S^2 \times S^2)$ は、論文45の半径2の S^3 と数値は一致するが多様体が異なる。統合してはならない（第3節）。

結論

本稿は、カイラル異常の分母に現れる $16\pi^2$ が $\text{Vol}(S^2 \times S^2)$ に等しいこと、および位相的指数を整数に規格化する係数であることを整理した。ただし初版が主張した「 $16\pi^2$ の Read-Only 属性が高次補正ゼロをもたらす」という因果関係は撤回する。 $1/(16\pi^2)$ は4次元のあらゆる1ループ量に現れる普遍因子であり、QCDのベータ関数のようにそのほとんどは高次補正を受けるからである。非繰り込み性を保証しているのは指数の整数性であって $16\pi^2$ の値ではない。

参考文献

1. Adler, S. L., & Bardeen, W. A. (1969). *Absence of Higher-Order Corrections in the Anomaly in Axial Vector Current Conservation*. Phys. Rev. 182, 1517.
2. Yamagishi, Y. (2026a). *The Uniqueness Theorem of $n=2$* [論文01]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403186
3. Yamagishi, Y. (2026aa). *The Yamagishi-Kepler Rendering Lag Equation* [論文28]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21430531

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)