

足せるのは対数だけである

— +50% のあと −50% は 0% ではなく −25% である — ±10% を 50 回ずつ繰り返すと −39.50% になり、素朴な和は 0% と答える — [論文292]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「収益率」は足し算できる量に見える。本稿が問うのは、どの書き方なら足せるかである——答は、対数収益率だけである。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、最小の例で確かめる。+50% のあと −50% は、単純収益率の和では 0% だが、実際は −25% である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。対数収益率の和 $\ln 1.5 + \ln 0.5 = -0.287682$ を指数に戻すと 0.750000——実測との差は 0 である（第2節）。第三に、「平均」が三つの別の操作を指す。算術平均 0%、幾何平均 −13.3975%、対数平均の指数 −13.3975%（第3節）。第四に、差は $\sigma^2/2$ で近似できる。±50% では 12.5% 対 13.3975% で 7.18% の誤差だが、±1% では比が 1.000025 になる（第4節）。第五に、長い系列で効く。±10% を 50 回ずつで −39.50%、素朴な和は 0% と答える（第5節）。第六に、年率換算も足し算ではない。日次 $\sigma = 1\%$ は年率 15.8745% であり、252 倍では 15.87 倍の過大評価になる（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——単純収益率と対数収益率の関係、幾何平均、ボラティリティ・ドラッグ、 $\sqrt{n}$ 則は、いずれも標準的である。金融理論を作らない——使うのは一つの対数と、一つの平方根だけである。価格を予測しない——将来の収益率も、期待値も一切扱わない。与えられた系列の合成規則だけを扱う。裾に入らない——論文190 が重い裾と大偏差を扱った。本稿は分布の形を一切仮定せず、足し算の可否だけを問う。 $\sqrt{n}$ 則の前提を隠さない——第6節の $\sqrt{252}$ は各期の独立性を仮定している。相関があれば成り立たない。 $\sigma^2/2$ を厳密だと言わない——第4節が示すとおり、 $\pm 50\%$ では 7.18% ずれる。小さい変動での近似式である。投資助言をしない——どの平均を使うべきかは問いによる。本稿はどれが何を答えるかを分けるだけである。既刊との関係：論文194 は四つの平均が一つの族であり、等号の柵が一つしかないことを示した——あちらは一時点での不等式の構造、本稿は時間方向に合成したとき、どれが正しいかであり、同じ四つの平均を材料にして問いが直交している。論文132 は伊藤の 2 が次元ではないと示した——本稿の $\sigma^2/2$ はその補正項そのものであり、第4節の収束表がそれを数で見せる。論文190 は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿も対数に移してはじめて足せる。論文272 は同じ「二倍」が刺激の側で 6.70 倍ひらくことを示した——本稿もどの目盛りで足すかの問題である。加えたのは対数の和を指数に戻すと実測との差が 0 になると確かめたこと、三つの「平均」を数で並べたこと、 $\sigma^2/2$ が変動の縮小とともに比 1.000025 に収束する表を作ったこと、 $\pm 10\%$ を 50 回ずつで -39.50% になると計算したことである。

1. 記法と問い

設定：価格が P_0 から P_1 に動いたとき、二通りの書き方がある。

名前	定義	範囲
単純収益率	$r = P_1/P_0 - 1$	$[-1, \infty)$
対数収益率	$\ell = \ln(P_1/P_0)$	$(-\infty, \infty)$

問い：二期間つなげたとき、どちらが足せるか。

観察 1.1

価格の合成は掛け算である—— $P_2/P_0 = (P_1/P_0)(P_2/P_1)$ 。対数を取れば掛け算は足し算になる——答は式の形にすでに書いてある。本稿はそれを数で確かめる。

2. 芯：対数の和は、差が 0 になる

検算 2.1：+50% のあと −50%。

やり方	計算	結果
単純収益率の和	$+0.5000 + (-0.5000)$	0.00% 【間違い】
実際の倍率	1.5×0.5	$0.7500 = -25.00\%$
対数収益率の和	$+0.405465 + (-0.693147)$	-0.287682
それを指数に戻す	$e^{-0.287682}$	0.750000 【合う】
実測との差		0

観察 2.2

これが本稿の芯である。対数の和を指数に戻すと、実測との差が 0（計算機の丸め誤差も出ない）——近いのではなく、同じである。

観察 2.3

単純収益率の和は 25 パーセントポイント外している。0% と −25% の違いは誤差ではなく、演算が違う——掛け算するべきものを足したのである。

観察 2.4

対数収益率が非対称であることに注意する。+50% は $\ln 1.5 = +0.405$ 、−50% は $\ln 0.5 = -0.693$ ——同じ「50%」でも、対数では 1.71 倍の違いがある。下げのほうが重いのは、−100% が $-\infty$ に対応するからである。

3. 「平均」が三つの別の操作を指す

検算 3.1：同じ二期間について、三つの「平均」を計算する。

平均	計算	値
算術平均（単純収益率）	$(0.5 - 0.5)/2$	0.0000%
幾何平均（実際の成長）	$\sqrt{1.5 \times 0.5} - 1$	-13.3975%
対数収益率の平均	$(-0.287682)/2 = -0.143841$	
それを指数に戻す	$e^{-0.143841} - 1$	-13.3975%
下二つの差		1.11×10^{-16}

観察 3.2

幾何平均と、対数平均を指数に戻したものは同じである。差は 10^{-16} 、すなわち計算機の丸め——幾何平均は対数の算術平均である。

観察 3.3

算術平均だけが **0%** と答える。差は **13.3975** パーセントポイント——どちらも「平均収益率」と呼ばれる。

観察 3.4

論文194 は四つの平均が一つの族であり、等号の柵が一つしかないことを示した。あちらは一時点での不等式の構造である——本稿は時間方向に合成したとき、どれが正しい答を返すかを問う。同じ四つの平均を材料にして、問いが直交している。

観察 3.5

分離子——どちらが正しいかは問いによる。「次の一期の期待値」を問うなら算術平均、「 n 期後にいくらになったか」を問うなら幾何平均である——どちらも正しく、答える問いが違う。

4. 差は $\sigma^2/2$ で近似でき、小さい変動で厳密に近づく

設定：算術平均と幾何平均の差は「ボラティリティ・ドラッグ」と呼ばれ、 $\sigma^2/2$ で近似される。

検算 4.1：±50% で確かめる。

量	値
単純収益率の標準偏差 σ	0.500000
$\sigma^2/2$	0.125000 = 12.5000%
実測のドラッグ（算術－幾何）	0.133975 = 13.3975%
比	1.0718（近似式は 7.18% の誤差）

検算 4.2：変動の大きさを $\pm x$ として、比がどう動くかを見る。

$\pm x$	実測ドラッグ	$\sigma^2/2 = x^2/2$	比
0.500	0.13397460	0.12500000	1.071797
0.200	0.02020410	0.02000000	1.010205
0.100	0.00501256	0.00500000	1.002513
0.050	0.00125078	0.00125000	1.000626
0.020	0.00020002	0.00020000	1.000100
0.010	0.00005000	0.00005000	1.000025

観察 4.3

x を 50 分の一にすると、比が 1.0718 から 1.000025 になる。 $\sigma^2/2$ は小さい変動の極限で厳密になる——これが伊藤の補正項の形である。

観察 4.4

論文132 は伊藤の 2 が次元ではないと示した。この表はその 2 が現れる場所を数で見せている—— $x^2/2$ の 2 は、テイラー展開の二次の項から来ており、空間の次元とは関係がない。

観察 4.5

正直に書くべき点—— $\pm 50\%$ では $\sigma^2/2$ は 7.18% ずれる。暴落を含む系列に使えば系統的に過小評価する——近似式であることを忘れてはいけない。

5. 長い系列で効く

検算 5.1 : $+10\%$ と -10% を 50 回ずつ、合計 100 期。

やり方	結果
単純収益率の和	0% 【間違い】
実際の倍率	0.60500607 = -39.4994%
対数の和 $50(\ln 1.1 + \ln 0.9)$	-0.50251679
それを指数に戻す	0.60500607 【合う】
一期あたり幾何平均	-0.501256%
$\sigma^2/2$ (一期あたり)	0.500000%

観察 5.2

100 期で **-39.50%** である。単純収益率の和は 0% と答える——損失の 39.5 パーセントポイントが、丸ごと見えなくなる。

観察 5.3

一期あたりの幾何平均 -0.501256% が、 $\sigma^2/2 = 0.500000\%$ と三桁一致している。 $\pm 10\%$ は小さいので近似がよく効く——第4節の表が予言したとおりである。

観察 5.4

そしてこの -39.5% は、上がりと下がりと同じ回数起きた結果である。「五分五分なら差し引きゼロ」という直観が、 39.5 パーセントポイント外している——変動そのものが費用である。

6. 年率換算も、足し算ではない

設定：各期が独立なら、分散が足し算になる。したがって標準偏差は $\sqrt{n}$ 倍である。

検算 6.1：日次 $\sigma = 1\%$ から。

期間	営業日 n	$\sigma\sqrt{n}$
週	5	2.2361%
月	21	4.5826%
年	252	15.8745%

観察 6.2

年率は 15.8745% であって、 252% ではない。素朴に 252 倍すると 252% となり、 15.8745 倍の過大評価になる—— $252/\sqrt{252} = \sqrt{252}$ だからである。

観察 6.3

ここでも「足せるのは何か」が問題である。足せるのは分散であって、標準偏差ではない——収益率では対数が足せ、ばらつきでは分散が足せる。

観察 6.4

正直に書くべき点—— $\sqrt{n}$ 則は各期の独立性を仮定している。相関があれば成り立たない——独立性は前提であって、観測された事実ではない。

観察 6.5

分離子——何を動かすと足せるようになるか。目盛りである。

量	合成の規則	足せる書き方
収益率	掛け算	対数
ばらつき	二乗の和	分散

観察 6.6

どちらも「元の量そのものは足せない」。足せる目盛りに移してから足し、最後に戻す——論文190 が「稀」を対数で測ったのと同じ手続きである。

7. 点呼と結び

1. $+50\%$ と -50% で -25% (検算2.1) : 単純和は 0% 。
2. 対数の和は差が 0 (検算2.1) : 丸め誤差も出ない。
3. $\ln 1.5$ と $\ln 0.5$ で 1.71 倍 (観察2.4) : 下げのほうが重い。
4. 幾何平均 -13.3975% (検算3.1) : 算術平均は 0% 。
5. 幾何 = 対数平均の指数 (観察3.2) : 差 1.11×10^{-16} 。
6. $\pm 50\%$ で $\sigma^2/2$ は 7.18% ずれる (検算4.1) : 近似式。
7. $\pm 1\%$ で比 1.000025 (検算4.2) : 伊藤の補正項の形。
8. 100 期で -39.4994% (検算5.1) : 和は 0% と答える。
9. 一期あたり -0.501256% (検算5.1) : $\sigma^2/2 = 0.5\%$ と三桁一致。
10. 年率 15.8745% (検算6.1) : 252 倍は 15.87 倍の過大評価。

結び：収益率は足せない。足せるのは対数だけである。 $+50\%$ のあと -50% は、単純収益率の和では 0% だが実際は -25% であり、対数の和 -0.287682 を指数に戻すと 0.750000 で、実測との差は 0 になる。「平均」という一語も三つの操作を指す——算術平均 0% 、幾何平均 -13.3975% 、そして幾何平均は対数の算術平均に他ならない（差 10^{-16} ）。その差は $\sigma^2/2$ で近似でき、変動を $\pm 50\%$ から $\pm 1\%$ に縮めると比が 1.0718 から 1.000025 になる——伊藤の補正項の形が、数の上に現れる。そして長い系列で効く—— $\pm 10\%$ を 50 回ずつ、上げと下げが同じ回数なのに -39.4994% であり、単純な和は 0% と答える。分けるものは一つ——その量の合成が掛け算か、足し算か。掛け算なら対数に移してから足す。ばらつきなら分散に移してから足す。移さずに足したものは、収益率でも平均でもない。

参考文献

1. Ito, K. (1951). On Stochastic Differential Equations. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 4.
 2. Fernholz, R. and Shay, B. (1982). Stochastic Portfolio Theory and Stock Market Equilibrium. *The Journal of Finance*, 37(2).
 3. Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press.
 4. Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives*. New York: Pearson.
 5. Kelly, J. L. (1956). A New Interpretation of Information Rate. *Bell System Technical Journal*, 35(4).
 6. 山岸勇輝 (2026). 伊藤の $\mathbf{2}$ は、次元ではない [論文132]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22080358
 7. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
 8. 山岸勇輝 (2026). 四つの平均は一つの族であり、等号の柵は一つしかない [論文194]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106809
 9. 山岸勇輝 (2026). 同じ「2 倍に感じる」が、刺激の側では 6.70 倍ひらく [論文272]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169965
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)