

分離は、長さの平方根でしか良くならない

— 分離度を **2** 倍にするにはカラムを **4** 倍長くし、時間も **4** 倍かかる — 三つの分野の平方根は同じ
一つの根から出ており、選択性を上げるほうが **3.64** 倍安い — [論文294]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

クロマトグラフィの分離度は $R_s \propto \sqrt{N} \propto \sqrt{L}$ である。本稿が問うのは、この平方根がどこから来ているかである——答は、分散の加法性である。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、代償は求める改善の二乗である。 R_s を **2** 倍にするには段数 **4** 倍、カラム長 **4** 倍、時間 **4** 倍（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。同じ平方根がクロマトグラフィ・拡散・統計の三つの場所に立ち、根は同じ一つである（第3節）。第三に、数で確かめる。独立な n 個を足すと分散が n 倍、標準偏差は $\sqrt{n}$ 倍—— n を **4** 倍で標準誤差はちょうど半分（第3節）。第四に、長さより選択性のほうが安い。 α を **1.05** から **1.10** にすると、必要段数が **3.64** 分の一になる（第4節）。第五に、最適流速がある。ファン・デームター式の最小段高は $u = \sqrt{B/C} = \mathbf{1.4142}$ mm/s で $H = \mathbf{20.97}$ μm （第5節）。第六に、分離子は「何が独立に足されるか」である。足されるのが分散なら平方根、期待値なら一次である（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——分離度の式、理論段数、ファン・デームター式、拡散の $\sqrt{2Dt}$ 、標準誤差 $\sigma/\sqrt{n}$ は、いずれも標準的である。分離科学を作らない——使うのは一つの平方根と、二つの割り算だけである。ファン・デームター式を導出しない—— A 、 B 、 C の物理的な中身には立ち入らない。最小値の位置だけを計算する。代表値の精度を主張しない—— $A = 4 \mu\text{m}$ 、 $B = 12000 \mu\text{m}^2/\text{s}$ 、 $C = 0.006 \text{ s}$ は典型的な HPLC の桁を示すための値であり、充填剤・移動相・分析種で大きく動く。ピーク形状を仮定している——分離度の式はガウス型のピークで、二成分の幅が等しいことを前提とする。テーリングがあれば成り立たない。圧力を扱わない——カラムを長くすれば背圧も比例して上がる。実際の上限はポンプが決めるが、本稿は扱わない。 $\sqrt{n}$ の独立性を隠さない——第3節の加法性は寄与が独立であることを仮定する。相関があれば $\sqrt{n}$ にならない。三つが「同じ現象」だと言わない——一致するのは分散が足されるという構造であって、現象そのものではない。既刊との関係：論文249 は拡散が捕らえる 4π が場の広がる 4π と同じ根だと示した——本稿は同じ拡散から、今度は平方根の側を取り出し、三つの分野で同根だと確かめる。論文112 は「同じ韻を踏む六つの別根」を数えた——本稿は韻も根も同じ場合であり、112 の対照である。論文204 は固有値の数え上げのべきが次元の半分だと示した——あちらの $1/2$ は次元から出るが、本稿の $1/2$ は分散の加法性から出る。同じ $1/2$ でも根が違う。論文188 は未知数より少ない測定で厳密に決まる場合を扱った——本稿は測定を増やしても平方根でしか良くならない場合である。加えたのは分離度の代償を「求める改善の二乗」と書いたこと、三つの分野の平方根が分散の加法性という同じ根から出ると特定したこと、選択性を上げるほうが 3.64 倍安いと計算したこと、ファン・デームターの最適点を数で出したことである。

1. 記法と問い

設定：二つの成分がカラムでどれだけ分かれたかは、分離度

$$R_s = \frac{\sqrt{N}}{4} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{k}{1 + k}$$

で測る (N は理論段数、 α は選択性、 k は保持係数)。

事実： $N = L/H$ なので、 $R_s \propto \sqrt{N} \propto \sqrt{L}$ である。

問い：なぜ平方根なのか。そして、同じ平方根が他の分野にも立っているのは同じ根か。

2. 代償は、求める改善の二乗である

検算 2.1： $\alpha = 1.10$ 、 $k = 3.0$ として、段数を四倍ずつ増やす。

理論段数 N	$\sqrt{N}/4$	R_s	カラム長	時間
2500	12.5000	0.852273	×1	×1
10000	25.0000	1.704545	×4	×4
40000	50.0000	3.409091	×16	×16
160000	100.0000	6.818182	×64	×64

観察 2.2

R_s が 2 倍になるたびに、段数もカラム長も時間も 4 倍になる。 R_s を 10 倍にしたければ 100 倍である——代償は、求める改善の二乗。

観察 2.3

カラム長と時間が同じ倍率で並んでいることに注意する。移動相の速さを変えなければ、長さとは時間は比例する——分離を買う通貨は時間である。

検算 2.4：ベースライン分離 $R_s = 1.5$ に要する段数を出す。

量	値
$N = 16(R_s/(\text{選択性項} \times \text{保持項}))^2$	7744.0 段

観察 2.5

式に R_s が二乗で入っている。 $R_s = 1.5$ に 7744 段、 $R_s = 3.0$ なら 30976 段——「もう少しだけ分けたい」が、いつも高くつく。

3. 芯：三つの場所の平方根は、同じ一つの根から出ている

設定：同じ形の平方根が、少なくとも三つの分野に立っている。

検算 3.1：

分野	現れ方	何が $\sqrt{\quad}$ の中か
クロマトグラフィ	バンド幅 $\sigma \propto \sqrt{L}$ 、 $R_s \propto \sqrt{N}$	カラム長
拡散	変位 $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt}$	時間
統計	標準誤差 $\sigma/\sqrt{n}$	標本数

観察 3.2

これが本稿の芯である。三つとも「独立な寄与を n 個足すと分散が n 倍になり、標準偏差は $\sqrt{n}$ 倍になる」という同じ一行から出ている——韻ではなく、根が同じである。

検算 3.3：数で確かめる。分散 1 の独立な量を n 個足す。

n	分散	標準偏差	平均の標準誤差
1	1.0000	1.000000	1.000000
4	4.0000	2.000000	0.500000
16	16.0000	4.000000	0.250000
100	100.0000	10.000000	0.100000
10000	10000.0000	100.000000	0.010000

観察 3.4

n を 4 倍にすると、標準偏差は 2 倍、標準誤差はちょうど半分になる。第2節の「 R_s を 2 倍にするのに 4 倍」と、まったく同じ数である——偶然ではなく、同じ計算である。

検算 3.5：三つの代償を並べる。

良くしたい量	2 倍にする代償	10 倍にする代償
分離度 R_s	カラム長 4 倍	100 倍
拡散の到達距離	時間 4 倍	100 倍
測定の精度 ($1/\text{標準誤差}$)	標本 4 倍	100 倍

観察 3.6

三行が完全に同じ数である。分野も、単位も、機構も違うのに——足されているものが同じだからである。

観察 3.7

論文112 は「同じ韻を踏む六つの別根」を数えた。本稿はその対照である——ここでは根まで同じであり、だから数が完全に一致する。論文249 が拡散の 4π を場の 4π と同根だと示したのと、同じ型の結論である。

観察 3.8

正直に書くべき点——同じ根であることは、同じ現象であることを意味しない。一致するのは分散が足されるという構造だけである——カラムの中で起きていることと、標本を集めることは、別の出来事である。

観察 3.9

論文204 の $1/2$ とは根が違う。あちらは次元から出る $1/2$ であり、本稿は分散の加法性から出る $1/2$ である——同じ $1/2$ を見たら、どちらの根かを確かめねばならない。

4. 長さより、選択性のほうが安い

設定： R_s の式には $\sqrt{N}$ のほかに選択性項 $(\alpha - 1)/\alpha$ がある。こちらは一次で効く。

検算 4.1： $R_s = 1.5$ に要る段数を、 α ごとに出す ($k = 3.0$)。

α	必要な段数 N	$\alpha = 1.05$ に対する比
1.05	28224.0	1
1.10	7744.0	1/3.64
1.20	2304.0	1/12.25
1.50	576.0	1/49.00

観察 4.2

α を 1.05 から 1.10 にするだけで、必要段数が **3.64** 分の一になる。1.20 なら **12.25** 分の一——移動相や固定相を変えて選択性を上げるほうが、カラムを長くするよりはるかに安い。

観察 4.3

理由は入り方が違うことである。 N は $\sqrt{\quad}$ の中、 α の項は一次——一次で効く変数を先に動かすのが、常に安い。

観察 4.4

分離子の一つ目——どの変数が平方根の中に入っているか。同じ「分離を良くする」でも、平方根の中を動かすか、外を動かすかで代償が二乗変わる。

5. 最適流速がある

設定：段高 H （一段の長さ）は、ファン・デームター式 $H = A + B/u + Cu$ に従う。 H が小さいほど、同じ長さで多くの段が取れる。

検算 5.1： $A = 4 \mu\text{m}$ 、 $B = 12000 \mu\text{m}^2/\text{s}$ 、 $C = 0.006 \text{ s}$ として。

量	値
最適流速 $u = \sqrt{B/C}$	1414.21 $\mu\text{m/s} = 1.4142$ mm/s
最小段高 $H = A + 2\sqrt{BC}$	20.9706 μm
カラム長 15 cm での段数 $N = L/H$	7152.9 段

観察 5.2

B/u は遅いほど悪く（縦拡散が効く）、 Cu は速いほど悪い（物質移動が追いつかない）。両者が釣り合う一点がある——速くしても遅くしても損をする。

観察 5.3

B が拡散係数から来ていることに注意する。第3節の平方根を生んだのと同じ拡散が、ここでは最適点を決めている——同じ機構が、分離を悪くもし、限界も決めている。

観察 5.4

そして 15 cm のカラムで **7152.9** 段である。第2節が求めた $R_s = 1.5$ の **7744** 段にわずかに足りない—— $\alpha = 1.10$ ではこのカラムでベースライン分離に届かない。

観察 5.5

そこで選択肢は二つ——カラムを **1.083** 倍長くするか、 α をわずかに上げるか。第4節が示したとおり、後者のほうがはるかに安い。

6. 分離子：何が独立に足されるか

観察 6.1

分離子——何を動かすと、平方根が一次になるか。足されるものが分散か、期待値かである。

足されるもの	n 個での振舞い	改善の代償
期待値（信号）	$\propto n$	一次
分散（雑音）	$\propto n$ 、標準偏差は $\propto \sqrt{n}$	二乗

観察 6.2

信号はそろって足されるので n に比例し、雑音は向きがばらばらなので $\sqrt{n}$ でしか増えない。だから信号対雑音比は $\sqrt{n}$ で良くなる——平方根は、良い知らせでもある。

観察 6.3

クロマトグラフィでも同じ構図である。保持時間 t_R は長さに比例し、バンド幅 σ は長さの平方根でしか広がらない——だから比 t_R/σ が $\sqrt{L}$ で良くなる。

観察 6.4

したがって「長くしても平方根でしか良くならない」は、半分は悪い知らせで、半分は良い知らせである。もしバンド幅も長さに比例していたら、どれだけ長くしても分離度は上がらなかった——分散が足されるからこそ、分離が可能になっている。

観察 6.5

正直に書くべき点——独立性が前提である。寄与に相関があれば分散は n 倍にならず、 $\sqrt{n}$ 則そのものが崩れる——相関は、分離にとっても測定にとっても敵である。

7. 点呼と結び

1. R_s 2 倍に段数 4 倍（検算2.1）：時間も 4 倍。
2. R_s 10 倍に 100 倍（観察2.2）：代償は改善の二乗。
3. $R_s = 1.5$ に 7744 段（検算2.4）： R_s が二乗で入る。
4. 三つの分野に同じ平方根（検算3.1）：クロマト・拡散・統計。

5. n を 4 倍で標準誤差は半分 (検算3.3) : 第2節と同じ数。
6. 三つの代償が完全に一致 (検算3.5) : 根が同じだから。
7. α 1.05 $\rightarrow$ 1.10 で 3.64 分の一 (検算4.1) : 一次で効く。
8. 最適流速 1.4142 mm/s (検算5.1) : $H = 20.9706 \mu\text{m}$ 。
9. 15 cm で 7152.9 段 (検算5.1) : 7744 にわずかに足りない。
10. 信号は n 、雑音は $\sqrt{n}$ (観察6.1) : だから分離できる。

結び : 分離は長さの平方根でしか良くならない。 R_s を 2 倍にするには段数もカラム長も時間も 4 倍、10 倍にするには 100 倍である——代償は、求める改善の二乗。その平方根はクロマトグラフィだけのものではない——拡散の $\sqrt{2Dt}$ も、統計の $\sigma/\sqrt{n}$ も、同じ一つの根から出ている。根は分散の加法性である——独立な寄与を n 個足すと分散が n 倍になり、標準偏差は $\sqrt{n}$ 倍にしかならない。だから三つの代償表が完全に同じ数になる。ただし手はある—— α を 1.05 から 1.10 に上げるだけで、必要段数は 3.64 分の一になる。分けるものは一つ——その変数が、平方根の中にいるか外にいるか。外にいる変数を先に動かすのが、常に安い。そして平方根は半分だけ悪い知らせである——バンド幅が長さに比例せず平方根でしか広がらないからこそ、分離が可能になっている。

参考文献

1. van Deemter, J. J., Zuiderweg, F. J. and Klinkenberg, A. (1956). Longitudinal Diffusion and Resistance to Mass Transfer as Causes of Nonideality in Chromatography. *Chemical Engineering Science*, 5(6).
 2. Martin, A. J. P. and Synge, R. L. M. (1941). A New Form of Chromatogram Employing Two Liquid Phases. *Biochemical Journal*, 35(12).
 3. Giddings, J. C. (1991). *Unified Separation Science*. New York: Wiley.
 4. Snyder, L. R., Kirkland, J. J. and Dolan, J. W. (2010). *Introduction to Modern Liquid Chromatography*. Hoboken: Wiley.
 5. Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8).
 6. 山岸勇輝 (2026). 割り当てられた領域と、その中の自由——同じ韻を踏む六つの別根のセンス [論文112]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962834
 7. 山岸勇輝 (2026). 未知数より少ない測定で、厳密に決まる [論文188]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22105691
 8. 山岸勇輝 (2026). 固有値を数えたときのべきは、次元の半分である [論文204]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22110032
 9. 山岸勇輝 (2026). 拡散が捕らえる 4π は、場が広がる 4π と同じ根である [論文249]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22160409
-

