

太鼓に音程が無いのは、境界のせいであって方程式のせいではない

— 弦は整数比、円形膜は無理数比で、単純な音程から **78** から **148** セント外れる — 「特殊関数」が
特殊なのは境界の形であり、球座標だから **4π** が出る — [論文299]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

ギターの弦には音程があり、太鼓には無い。どちらも同じ波動方程式に従う。本稿が問うのは、何が違うのかである——答は、境界の形である。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、弦は整数比、円形膜は無理数比である。膜の比は **1.000000**、**1.593341**、**2.135549**、**2.295417** である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。耳が捉える単純な音程から **78** から **148** セント外れており、半音（**100** セント）と同程度かそれ以上である（第2節）。第三に、弦なら隔たりはゼロである。**2/1**、**3/1**、**4/1** とちょうど整数比（第2節）。第四に、方程式は同じである。どちらもラプラシアンであり、違うのは境界だけである（第3節）。第五に、変数分離できる座標系は **11** 個である。直交なら指数関数、球ならルジャンドル、円筒ならベッセル——境界が関数を選んでいる（第3節）。第六に、だから球座標のときだけ **4π** が出る。円筒なら **2π** 、直交なら **π** すら出ない（第4節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——円形膜の固有振動、ベッセル関数の零点、変数分離可能な 11 個の座標系 (アイゼンハート) は、いずれも標準的である。偏微分方程式論を作らない——使うのは五つの零点の比と、一つの対数だけである。固有値問題を解かない——ベッセル零点は文献値を引くだけである。楽器を論じない——ティンパニが中心を外して叩かれること、空気の負荷が倍音を近似的に整えることは触れるにとどめ、扱わない。理想的な円形膜だけを扱う。音楽理論を作らない——協和・不協和の心理も、音律も一切扱わない。セントは比を読みやすくするための目盛りである。「単純な音程」は約束である——第 2 節の「分子・分母とも 6 以下」は本稿の取り決めであり、上限を上げれば隔たりは小さくなる。主張は「どの比も整数でない」ことであって、セントの値ではない。逆問題を扱わない——論文102 はカツの逆スペクトル問題 (スペクトルから形が決まるか) を扱った。本稿は順方向であり、形からスペクトルの比が決まる側である。順逆が逆である。11 個という数を主張しない——アイゼンハートの分類は三次元のヘルムホルツ方程式についてであり、次元や方程式を変えれば数が変わる。既刊との関係：論文02 は逆二乗場に純粋立体角 4π が現れることを示した——本稿はその 4π が球座標を選んだことの帰結だという側から見る。論文258 は 4π が出るのは源が点のときだけだと示した——本稿は座標系の側から同じ条件を言い直す。論文249 は拡散の 4π が場の 4π と同根だと示した——本稿は 4π が出ない座標系を並べることで、同じ根を裏から確かめる。論文276 はデシベルが比であって量でないことを示した——本稿のセントも比を対数で読む目盛りであり、兄弟である。加えたのは円形膜の比を単純な音程からの隔たりとして 78–148 セントと測ったこと、弦との差をゼロと対置したこと、11 個の座標系が関数を選ぶという形で「特殊関数の特殊さ」を境界に帰したこと、その帰結として 4π の出どころを座標系に置いたことである。

1. 記法と問い

事実：ギターの弦を弾けば音程が聞き取れる。太鼓を叩いても音程は聞き取れない。

ところが：どちらも同じ方程式に従う。

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

問い：方程式が同じなら、何が違うのか。

観察 1.1

違うのは境界だけである。弦は線分 (両端が固定)、膜は円板 (周が固定) ——本稿はその一点から、音程の有無まで降りる。

2. 芯：弦は整数比、円形膜は無理数比

設定：固定端の弦の固有振動数は n に比例する ($n = 1, 2, 3, \dots$)。周を固定した円形膜の固有振動数は、ベッセル関数の零点 $j_{m,n}$ に比例する。

検算 2.1：基音との比を並べる。

モード	零点 $j_{m,n}$	基音との比	弦なら
$j_{0,1}$	2.404826	1.000000	1
$j_{1,1}$	3.831706	1.593341	2
$j_{2,1}$	5.135622	2.135549	3
$j_{0,2}$	5.520078	2.295417	4
$j_{3,1}$	6.380162	2.653066	5

観察 2.2

右の二列が一つも合わない。弦は 1, 2, 3, 4, 5 と整数、膜は 1.593341、2.135549 と整数でない——倍音が調和しないので、音程が聞き取れない。

検算 2.3：「聞き取れない」を数にする。耳が捉える単純な音程（分子・分母とも 6 以下）から、どれだけ離れているかを測る。半音は 100 セントである。

モード	比	最も近い単純比	隔たり
$j_{1,1}$	1.593341	$5/3 = 1.666667$	−77.9 セント
$j_{2,1}$	2.135549	$2/1 = 2.000000$	+113.5 セント
$j_{0,2}$	2.295417	$5/2 = 2.500000$	−147.8 セント
$j_{3,1}$	2.653066	$5/2 = 2.500000$	+102.9 セント

観察 2.4

これが本稿の芯である。隔たりは **78** から **148** セント——半音（100 セント）と同程度か、それ以上である。「わずかにずれている」のではなく、まるごと別の場所にある。

検算 2.5：弦と対置する。

弦の倍音	比	隔たり
第 2	$2/1 = 2.000000$	0.0 セント
第 3	$3/1 = 3.000000$	0.0 セント
第 4	$4/1 = 4.000000$	0.0 セント
第 5	$5/1 = 5.000000$	0.0 セント

観察 2.6

弦は隔たりがちょうどゼロである。近いのではなく、定義から整数である——弦の倍音が「調和」と呼ばれるのは比喻ではなく、整数比だからである。

観察 2.7

正直に書くべき点——「単純な音程」を分子・分母 **6** 以下と決めたのは本稿の取り決めである。上限を上げれば、どんな数も分数で近似できる——主張は「どの比も整数でない」ことであって、セントの値そのものではない。

観察 2.8

実際のティンパニは音程を持つ。中心を外して叩き、空気の負荷が倍音を寄せるからである——つまり、理想的な円形膜から離れることで音程を作っている。

3. 方程式は同じで、境界が関数を選ぶ

観察 3.1

弦も膜も、同じラプラシアンである。変わったのはどの座標で変数分離するかだけ——そしてそれは境界の形が決める。

検算 3.2：三つの座標系で、何が出るかを並べる。

座標系	出てくる関数	名前
直交座標	e^{ikz}	指数関数
球座標	$P_l^m(\cos \theta)$	ルジャンドル
円筒座標	$J_m(kr)$	ベッセル

観察 3.3

方程式は三つとも同じである。出てくる関数だけが違う——「特殊関数」が特殊なのは、方程式ではなく境界の形である。

観察 3.4

三次元のヘルムホルツ方程式が変数分離できる座標系は、アイゼンハートの分類で **11** 個である。楕円柱、放物柱、扁長回転楕円体、扁平回転楕円体、円錐、楕円体、放物面など——それぞれに専用の「特殊関数」がある。

観察 3.5

したがって、特殊関数の一覧は関数の一覧ではなく、境界の一覧である。ベッセル関数を学ぶことは、円筒という境界を学ぶことである——関数の側に本質は無い。

観察 3.6

論文102 はカツの逆スペクトル問題（スペクトルから形が決まるか）を扱った。本稿は順方向である——形からスペクトルの比が決まる側であり、順逆が逆である。あちらは「聴いて形が分かるか」、本稿は「形が音程を消す」。

4. だから球座標のときだけ、 4π が出る

観察 4.1

第3節の帰結を、定数の側から書く。

検算 4.2 :

座標系	境界が持つ量	出てくる定数
直交座標	面（平ら）	π も 4π も出ない
円筒座標	円周	2π
球座標	立体角	$4\pi = 12.5663706144$

観察 4.3

論文02 は、逆二乗場に純粹立体角 4π が現れることを示した。本稿はそれを裏から見ている—— 4π が出るのは、球座標を選んだからである。

観察 4.4

そして球座標を選ぶのはこちらの都合ではない。源が点であれば、境界（等ポテンシャル面）が球になる——論文258 が「 4π が出るのは源が点のときだけ」と書いたのは、これと同じことを源の側から言っている。

観察 4.5

論文249は、拡散が捕らえる 4π が場の広がる 4π と同じ根だと示した。本稿は 4π が出ない座標系を並べることで、同じ根を裏から確かめている——円筒では 2π しか出ず、直交では何も出ない。

観察 4.6

したがって 4π は方程式の性質ではない。ラプラシアンには 4π が書かれていない——境界を球に取った瞬間に現れる。太鼓に音程が無いのと、 4π が出るのは、同じ一つの事実の二つの現れである——どちらも境界が決めている。

5. 分離子：境界が方程式より上にある

観察 5.1

分離子——何を動かすと、音程が現れるか。境界の形である。

境界	固有値の比	音程
線分（弦）	1, 2, 3, 4, ...（整数）	ある
円板（膜）	1, 1.593341, 2.135549, ...（無理数）	ない

観察 5.2

方程式は二行とも同じである。変わったのは境界だけ——音程という現象が、方程式ではなく形から出ている。

観察 5.3

論文276はデシベルが比であって量ではないことを示した。本稿のセントも比を対数で読む目盛りである——どちらも「量に見える無次元数」を扱っており、兄弟である。

観察 5.4

最後に、この編が体系の中で何をしたかを書く。「特殊関数」も「 4π 」も「音程」も、方程式の側の性質ではなく、境界の側の性質である——三つとも、同じ一つの分離子が分けている。

観察 5.5

正直に書くべき点——本稿は「境界がすべてを決める」とは言わない。方程式が変われば（たとえば波動方程式を拡散方程式にすれば）同じ境界でも別の答になる——言えるのは、方程式を固定したとき、残りを決めているのが境界だということだけである。

6. 点呼と結び

1. 膜の比は **1.593341**、**2.135549**（検算2.1）：弦は **2**、**3**。
2. 隔たりは **78–148** セント（検算2.3）：半音以上。
3. 弦の隔たりは **0.0** セント（検算2.5）：定義から整数。
4. 方程式は同じラプラシアン（観察3.1）：境界だけが違う。
5. 三つの座標系、三つの関数（検算3.2）：指数・ルジャンドル・ベッセル。
6. 変数分離できるのは **11** 個（観察3.4）：境界の一覧である。
7. 球なら 4π 、円筒なら 2π （検算4.2）：直交なら何も出ない。
8. 4π は方程式に書かれていない（観察4.6）：境界が呼び出す。
9. 論文**102** とは順逆が逆（観察3.6）：あちらは聴いて形を当てる。
10. セントは比の目盛り（観察5.3）：論文**276** と兄弟。

結び：太鼓に音程が無いのは、境界のせいであって方程式のせいではない。弦も膜も同じラプラシアンに従うのに、弦の倍音は **2, 3, 4, 5** と整数比で隔たり **0.0** セント、円形膜は **1.593341**、**2.135549** と無理数比で、耳が捉える単純な音程から **78** から **148** セント外れる——半音（**100** セント）と同程度か、それ以上である。わずかにずれているのではなく、まるごと別の場所にある。同じことが「特殊関数」にも言える——変数分離できる座標系は **11** 個あり、直交なら指数関数、球ならルジャンドル、円筒ならベッセルが出る。特殊関数の一覧は、関数の一覧ではなく境界の一覧である。そして同じ理屈が 4π に及ぶ——球座標なら 4π 、円筒座標なら 2π 、直交座標なら何も出ない。ラプラシアンに 4π は書かれていない。境界を球に取った瞬間に現れる。分けるものは一つ——境界の形。太鼓に音程が無いことと、逆二乗場に 4π が出ることは、同じ一つの事実の二つの現れである。

参考文献

1. Rayleigh, J. W. S. (1877). *The Theory of Sound*. London: Macmillan.
 2. Eisenhart, L. P. (1934). Separable Systems of Stackel. *Annals of Mathematics*, 35(2).
 3. Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill.
 4. Fletcher, N. H. and Rossing, T. D. (1998). *The Physics of Musical Instruments*. New York: Springer.
 5. Watson, G. N. (1944). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge: Cambridge University Press.
 6. Kac, M. (1966). Can One Hear the Shape of a Drum? *The American Mathematical Monthly*, 73(4).
 7. 山岸勇輝 (2026). 4π 質量相殺定理 — 逆二乗場における純粋立体角の出現と無摩擦平衡 (Zero-Tension) の数理構造 [論文02]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21403931
 8. 山岸勇輝 (2026). スペクトルから形を聴く — コンヌの非可換幾何・カツツの逆スペクトル問題と、幾何と逆問題をつなぐ高速道路 [論文102]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21836735
 9. 山岸勇輝 (2026). 拡散が捕らえる 4π は、場が広がる 4π と同じ根である [論文249]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22160409
 10. 山岸勇輝 (2026). 4π が出るのは、源が点のときだけである [論文258]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169011
 11. 山岸勇輝 (2026). デシベルは比であって、量ではない [論文276]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22170073
-

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)