

「必ず現れる」は、いつ現れるかを教えない

— $R(5,5)$ を総当たりで確かめるには $10^{271.8}$ 通りが要り、宇宙の原子より **191.8** 桁多い — 存在は証明できるが、大きさは教えない — [論文302]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

ラムゼーの定理は「十分大きければ必ず秩序が現れる」と言う。本稿が問うのは、「十分大きい」がどれだけかである——答は、定理は教えないである。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、確定している値は二つだけである。 $R(3,3) = 6$ と $R(4,4) = 18$ で、 $R(5,5)$ は $[43, 48]$ の範囲にしか収まっていない（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。 $R(5,5) = 43$ を総当たりで確かめるには $2^{903} = 10^{271.8}$ 通りが要り、宇宙の原子より **191.8** 桁多い（第3節）。第三に、一段上がるごとに跳ぶ。 $R(3,3)$ は **32768** 通りで手が届き、 $R(4,4)$ は 1.14×10^{46} 通りで計算機がようやく届いた（第3節）。第四に、下限の証明も値を教えない。エルデシュの確率論的方法は $R(k,k) > 2^{k/2}$ を与えるが、 $k = 10$ で実際の **24.94** 分の一である（第4節）。第五に、上界はもっと外れる。 $W(3,3) = 27$ なのに、古典的証明が与えた上界はアッカーマン級だった（第5節）。第六に、分離子は「存在と定量」である。論文163の「存在と構成」とは別の切り口である（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ラムゼーの定理、ラムゼー数の既知の値と範囲、ファン・デル・ヴェルデン数、エルデシュの確率論的下限は、いずれも標準的である。組合せ論を作らない——使うのは一つの二項係数と、二つの対数だけである。ラムゼーの定理を証明しない——引くだけである。ラムゼー数を計算しない—— $R(5, 5)$ の値を求めようとはしていない。求めるのに要する手間だけを数える。範囲の値を主張しない—— $R(5, 5) \in [43, 48]$ 、 $R(6, 6) \in [102, 160]$ はある時点で知られている範囲であり、改善される。本稿の主張は範囲が空でないことであって、端の値ではない。総当たりが唯一の道だと言わない——実際の探索は対称性と枝刈りで大幅に減らす。 2^{903} は素朴な上界であって、必要な計算量ではない。それでも到底届かない、という桁の話である。アッカーマン級という語を厳密に使わない——ガワーズ以前の上界が塔の高さが増える型だったことを指す。本稿は上界の形を主張せず、真の値との乖離だけを言う。既刊との関係：論文163は「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」を分けた——あちらは存在と構成、本稿は存在と定量である。構成できても大きさが分からない場合を扱うので、切り口が違う。論文179は「構成できない」に別根があると示した——本稿は構成できるのに手が届かない場合である。論文190は「稀」を対数の目盛りで測った——本稿の271.8桁も対数で読む。論文259は独立性を示す道が二つあると示した——本稿も示し方の種類を問う。加えたのは $R(5, 5)$ の総当たりを $10^{271.8}$ 通りと計算し、宇宙の原子との差を 191.8桁と測ったこと、 $R(3, 3) \cdot R(4, 4) \cdot R(5, 5)$ で手間が跳ぶ段を並べたこと、確率論的下限が $k = 10$ で 24.94分の一だと計算したこと、分離子を「存在と定量」に置いたことである。

1. 記法と問い

定理 (ラムゼー、1930) : n が十分大きければ、 n 頂点の完全グラフの辺を二色で塗り分けたとき、必ず単色の K_k が現れる。

定義 : そのような最小の n を $R(k, k)$ と書く。

問い : 定理は「必ず現れる」と言う。では $R(k, k)$ はいくつか。

観察 1.1

定理の証明は存在を保証する。ところが値を教えない——本稿はその隔たりを数で測る。

観察 1.2

エルデシュの有名な言い方がある——異星人が $R(5, 5)$ を要求したら人類は全計算資源を投じるべきだが、 $R(6, 6)$ を要求されたら戦うほうがましである。本稿はこの言葉を数で確かめる。

2. 確定している値は、二つだけである

検算 2.1 :

	下限	上限	確定か
$R(3,3)$	6	6	確定
$R(4,4)$	18	18	確定
$R(5,5)$	43	48	未確定
$R(6,6)$	102	160	未確定
$R(7,7)$	205	492	未確定

観察 2.2

確定しているのは最初の二つだけである。 $R(4,4) = 18$ が確定したのは 1995 年——定理が証明されてから 65 年後である。

観察 2.3

$R(6,6)$ の範囲は $[102, 160]$ で、幅が 58ある。 $R(7,7)$ では $[205, 492]$ で幅が 287——一段上がるごとに、分からなさが増えている。

観察 2.4

それでも「存在する」ことは最初から証明されている。どの k についても $R(k,k)$ は有限である——有限だと分かっているのに、いくつか分からない。

3. 芯：総当たりに $10^{271.8}$ 通り

設定： $R(5,5) = 43$ を総当たりで確かめるとする。43 頂点の完全グラフの辺をすべて二色で塗り分ける。

検算 3.1 :

量	値
頂点数	43
辺の数 $\binom{43}{2}$	903
塗り分けの総数 2^{903}	$10^{271.8}$
観測可能な宇宙の原子	10^{80}
足りない桁	191.8 桁

観察 3.2

これが本稿の芯である。原子を一つずつ計算機にしても、**191.8** 桁足りない——足りないのは計算機の速さではなく、物質の量である。

検算 3.3：一段ずつ下がって、どこで手が届くかを見る。

	頂点	辺	塗り分けの総数
$R(3, 3)$	6	15	32768 (手で数えられる)
$R(4, 4)$	18	153	1.14×10^{46} (計算機で 1995 年)
$R(5, 5)$	43	903	$10^{271.8}$ (届かない)

観察 3.4

$R(3, 3)$ から $R(4, 4)$ で 10^{41} 倍、 $R(4, 4)$ から $R(5, 5)$ で 10^{226} 倍——一段上がるごとに跳び方が大きくなる。

観察 3.5

正直に書くべき点—— 2^{903} は素朴な上界である。実際の探索は対称性と枝刈りで大幅に減らす——それでも $R(5, 5)$ には届いていない、という事実だけが本稿の根拠である。

4. 下限の証明も、値を教えない

設定：エルデシュ（1947）は確率論的方法で $R(k, k) > 2^{k/2}$ を示した。ランダムに塗って、単色 K_k が現れない配置が正の確率で存在することを言う。

検算 4.1：

k	$2^{k/2}$	知られた下限	比
3	2.83	6	2.12
4	4.00	18	4.50
5	5.66	43	7.60
6	8.00	102	12.75
7	11.31	205	18.12
10	32.00	798	24.94

観察 4.2

確率論的方法が与える下限は、 $k = 10$ で実際の **24.94** 分の一である。そして比は k とともに開いていく——近づかない。

観察 4.3

ここにもう一段の隔たりがある。確率論的方法は「単色 K_k を持たない塗り方が存在する」と示すが、どの塗り方かは一つも示さない——論文163 が分けた「存在と構成」である。

観察 4.4

したがって隔たりは二重になっている。

分かること	分からないこと
$R(k, k)$ は有限である	いくつか（本稿）
下限を満たす塗り方が存在する	どの塗り方か（論文163）

観察 4.5

二行は別の隔たりである。上の行は定量、下の行は構成——一つの定理が、二種類の「教えない」を同時に持っている。

5. 上界はもっと外れる

設定：ファン・デル・ヴェルデンの定理も同じ形をしている——「十分長ければ、必ず等差数列が現れる」。

検算 5.1：知られている値。

	値
$W(2, 3)$	9
$W(3, 3)$	27
$W(4, 3)$	76
$W(2, 4)$	35
$W(2, 5)$	178

観察 5.2

$W(3, 3) = 27$ である。ところが古典的な証明が与えた上界は、塔の高さが増える型（アッカーマン級）だった——真の値が 27なのに、上界は書き下すことすらできない大きさだった。

観察 5.3

ガワーズ（2001）が塔を外し、上界を初等的な形まで下げた。それでも真の値との隔たりは残る——証明の技法が変わると上界が桁で動く、ということは、上界が現象を測っていなかったということである。

観察 5.4

これが本稿の第二の芯である。定理の上界は、証明の道具の性能を測っているのであって、対象の大きさを測っていない——道具を変えれば上界は動き、対象は動かない。

観察 5.5

正直に書くべき点——「アッカーマン級」は目安の語である。本稿が言うのは上界の形の分類ではなく、真の値との乖離が桁で動いたという事実だけである。

6. 分離子：存在と定量

観察 6.1

分離子——何を動かすと、「必ず現れる」が「いつ現れる」に変わるか。何も動かない。二つは別の問いであり、片方の答は他方を含まない。

問い	答の型	本件
現れるか	はい／いいえ	はい（1930 に決着）
いくつで現れるか	数	$k = 5$ 以上は未定
どの配置か	構成	示されていない

観察 6.2

三行は独立に答えられる。一行目が「はい」でも、二行目と三行目は開いたままである——「証明された」という一語が、三つのうち一つしか指していない。

観察 6.3

論文163は「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」を分けた。本稿はその隣に三つ目の文を置く——「良い符号は n 以下にある」。存在・定量・構成の三つは、たがいに独立である。

観察 6.4

論文190は「稀」を対数の目盛りで測った。本稿の **271.8** 桁も同じである——比で言えば意味を持たない大きさだが、桁で言えば「**191.8** 桁足りない」と言える。

観察 6.5

最後に、エルデシュの言葉を数で読み直す。 $R(5, 5)$ は $10^{271.8}$ 通り、 $R(6, 6)$ は $\binom{102}{2} = 5151$ 辺で $2^{5151} = 10^{1550.6}$ 通り——**1278.8** 桁の差がある。「戦うほうがまし」は誇張ではなく、桁の記述だった。

7. 点呼と結び

1. 確定は $R(3, 3) = 6$ 、 $R(4, 4) = 18$ の二つ（検算2.1）： $R(5, 5)$ は範囲のみ。
2. $R(4, 4)$ の確定は 1995 年（観察2.2）：定理から 65 年後。
3. $R(5, 5)$ の総当たりは $10^{271.8}$ 通り（検算3.1）：辺が 903 本。
4. 宇宙の原子より **191.8** 桁多い（検算3.1）：足りないのは物質の量。
5. 一段で 10^{226} 倍（観察3.4）：跳び方が大きくなる。
6. 下限は $k = 10$ で **24.94** 分の一（検算4.1）：比は開いていく。
7. 隔たりは二重（観察4.4）：定量と構成。
8. $W(3, 3) = 27$ （検算5.1）：上界は塔の型だった。
9. 上界は道具を測っている（観察5.4）：対象は動かない。

10. $R(6, 6)$ は $10^{1550.6}$ 通り (観察6.5) : $R(5, 5)$ と 1278.8 桁差。

結び：ラムゼーの定理は「十分大きければ必ず秩序が現れる」と言う。だが「十分大きい」を教えない。確定している値は $R(3, 3) = 6$ と $R(4, 4) = 18$ の二つだけで、 $R(5, 5)$ は [43, 48] の範囲にしか収まっていない—— $R(4, 4)$ の確定でさえ、定理から 65 年かかった。総当たりの手間を数えれば理由が分かる—— $R(5, 5) = 43$ は辺が 903 本、塗り分けが $2^{903} = 10^{271.8}$ 通りで、観測可能な宇宙の原子より 191.8 桁多い。足りないのは計算機の速さではなく、物質の量である。下限の側も同じである——確率論的方法是 $R(k, k) > 2^{k/2}$ を与えるが、 $k = 10$ で実際の 24.94 分の一であり、比は k とともに開いていく。上界はもっと外れる—— $W(3, 3)$ の真の値は 27 なのに、古典的証明の上界は書き下せない大きさだった。定理の上界は、証明の道具の性能を測っているのであって、対象の大きさを測っていない。分けるものは一つ——存在するかと、いくつかと、どれかは、三つの別の問いである。一つ目が「はい」でも、残り二つは開いたままでありうる。「証明された」という一語が、三つのうち一つしか指していない。

参考文献

1. Ramsey, F. P. (1930). On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-30(1).
2. Erdos, P. (1947). Some Remarks on the Theory of Graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(4).
3. McKay, B. D. and Radziszowski, S. P. (1995). $R(4, 5) = 25$. *Journal of Graph Theory*, 19(3).
4. Radziszowski, S. P. (2021). Small Ramsey Numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic Survey DS1.
5. van der Waerden, B. L. (1927). Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 15.
6. Gowers, W. T. (2001). A New Proof of Szemerédi's Theorem. *Geometric and Functional Analysis*, 11(3).
7. Alon, N. and Spencer, J. H. (2016). *The Probabilistic Method*. Hoboken: Wiley.
8. 山岸勇輝 (2026). 割り当てられた領域と、その中の自由 — 同じ韻を踏む六つの別根のセンス [論文112]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962834
9. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
10. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419
11. 山岸勇輝 (2026). 「稀」は、対数の目盛りで測る [論文190]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106182
12. 山岸勇輝 (2026). 独立性を示す道は二つあり、一方は世界を狭め、他方は広げる [論文259]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169162

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)