

公式は 4 を返すが、その一点だけ証明が効かない

—— ヒーウッドの公式は $g \geq 1$ で定理であり、 $g = 0$ では正しい値を返すだけである —— 最も単純な曲面が 78 年遅れて、しかも計算機で片づいた —— [論文303]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

ヒーウッドの公式 $\chi(g) = \lfloor (7 + \sqrt{1 + 48g})/2 \rfloor$ は、種数 g の曲面の彩色数を与える。 $g = 0$ を入れると **4** が出る——四色定理の値そのものである。本稿が問うのは、ではそれは四色定理の証明かである——答は、違うである。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、公式は $g = 0$ で正しい値を返す。 $(7 + \sqrt{1})/2 = 4.000000$ 、床関数で **4** である（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。 $g \geq 1$ では定理だが、 $g = 0$ では証明が効かない——ヒーウッドの論法はその一点だけを落とす（第3節）。第三に、**78** 年の差がついた。 $g = 1$ は 1890 年、 $g \geq 1$ 全体は 1968 年に決着し、 $g = 0$ は 1976 年である（第4節）。第四に、最も単純な曲面が最後に残った。しかも**1936** 個の可約配置を計算機で検査してようやく片づいた（第4節）。第五に、向き付け不可能な側にも例外が一つある。クラインの壺で公式は **7** を返すが、実際は **6** である（第5節）。第六に、分離子は「値が正しいこと」と「証明が届くこと」である（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ヒューッ木の公式、リンゲル＝ヤングスの定理、四色定理、フランクリンの例外は、いずれも標準的である。位相幾何学を作らない——使うのは一つの平方根と、一つの床関数だけである。四色定理を証明しない——アッペル＝ハーケンの証明にも、その後の簡略化にも立ち入らない。ヒューッ木の論法を再現しない——オイラーの公式からの上界の導出は引くだけである。可約配置の個数を主張しない——1936 は1976 年版の数であり、1997 年のロバートソンらの証明では 633 に減っている。本稿の主張は「人が読み通せない量である」ことであって、個数そのものではない。計算機による証明の当否を論じない——受け入れるべきかどうかは扱わない。2005 年に Coq で形式化されたことだけを記録する。向き付け不可能曲面を主要な対象にしない——第5節のクラインの壺は例外が存在することを示すために置いた。向き付け不可能曲面の彩色を体系的には扱わない。既刊との関係：論文302 は「必ず現れる」が「いつ現れる」を教えないことを扱った——本稿は値は分かっているのに証明が届かない場合であり、隔たりの向きが逆である。論文163 は「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」を分けた——本稿は「値はこれだ」と「なぜそうか」を分ける。論文179 は「構成できない」に別根があると示した——本稿の $g = 0$ は一つの論法が届かないだけであり、別の論法が届いた。論文112 は「同じ韻を踏む六つの別根」を数えた——本稿の $g = 0$ と $g \geq 1$ は同じ公式の値を共有しながら、根拠が別である。加えたのは公式が $g = 0$ で 4.000000 を返すと確かめたこと、 $g \geq 1$ と $g = 0$ の決着年に 78 年の差があると測ったこと、最も単純な曲面が最後に残ったという順序の逆転を記録したこと、分離子を「値の正しさ」と「証明の到達」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：種数 g の向き付け可能閉曲面の上に描いたどんな地図も、 $\chi(g)$ 色で塗り分けられる。ヒューッ木 (1890) はこれを与えた。

$$\chi(g) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$$

問い： $g = 0$ (球面、すなわち平面) を入れると何が出るか。そして、それは四色定理の証明になっているか。

観察 1.1

答の前半は「4 が出る」である。後半は「なっていない」である——本稿はこの隔たりを扱う。

2. 公式は $g = 0$ で 4 を返す

検算 2.1 :

種数 g	$(7 + \sqrt{1 + 48g})/2$	$\chi(g)$	曲面
0	4.000000	4	球面
1	7.000000	7	トーラス
2	8.424429	8	二重トーラス
3	9.520797	9	三重トーラス
4	10.446222	10	
5	11.262087	11	
6	12.000000	12	
7	12.678780	12	
10	14.465856	14	

観察 2.2

$g = 0$ で $1 + 48 \cdot 0 = 1$ 、 $\sqrt{1} = 1$ 、 $(7 + 1)/2 = 4.000000$ である。床関数を取るまでもなくちょうど 4——四色定理の値そのものである。

観察 2.3

$g = 6$ と $g = 7$ がどちらも 12 になることに注意する。床関数が同じ値へ潰す——種数が増えても彩色数が増えない段がある。

観察 2.4

値を見るかぎり、 $g = 0$ は数列の自然な最初の項に見える。4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... と並び、切れ目が無い——切れ目は値の側ではなく、証明の側にある。

3. 芯： $g \geq 1$ では定理、 $g = 0$ では証明が効かない

観察 3.1

ヒーウッドが 1890 年に示したのは上界である——「 $\chi(g)$ 色あれば足りる」。オイラーの公式から平均次数を評価する論法で、 $g \geq 1$ について通る。

観察 3.2

下限（その色数が実際に必要な地図がある）は、リングエルとヤングスが 1968 年に完成させた。これで $g \geq 1$ については公式が定理になった。

観察 3.3

これが本稿の芯である。 $g = 0$ だけ、ヒーウッドの論法が上界 4 を与えない——同じ論法は $g = 0$ で 5 色までしか下げられない（五色定理）。

検算 3.4：どこまで届いたかを並べる。

ヒーウッドの論法が与える上界		真の値
$g \geq 1$	$\chi(g)$ （公式どおり）	$\chi(g)$ （一致）
$g = 0$	5（五色定理）	4（一致しない）

観察 3.5

差はたった 1 である。5 色までは同じ論法で行けるのに、最後の 1 が落ちない——そしてその 1 に 86 年かかった（1890 から 1976）。

観察 3.6

したがって公式の身分は二つに割れている。

公式 $\chi(g)$ の身分	
$g \geq 1$	定理（上界も下限も証明済み）
$g = 0$	正しい値を返す式（別の証明で確かめられた）

観察 3.7

同じ一本の式が、一点だけ身分を変える——論文16が「等号にも別根がある」と書いたのと同じ構図が、一つの関数の定義域の中で起きている。

4. 78 年の差 —— 最も単純な曲面が最後に残った

検算 4.1：

曲面	彩色数	決着	方法
トーラス $g = 1$	7	1890（ヒーウッド）	手で
$g = 2$	8	1968（リングエル＝ヤングス）	手で
$g \geq 1$ すべて	公式	1968	手で
球面 $g = 0$	4	1976（アッペル＝ハーケン）	計算機

観察 4.2

最も単純な曲面が、最後に片づいた。トーラスの決着（1890）から球面の決着（1976）まで86年、 $g \geq 1$ 全体の決着（1968）からでも8年——難しさの順序が、単純さの順序と逆になっている。

観察 4.3

理由は余裕の量である。種数が大きいほどオイラー標数の余裕が大きく、平均次数の評価が効く——球面は最も余裕が無いので、最も効かない。

検算 4.4：そして片づけ方も違った。

量	値
アップル＝ハーケンが検査した可約配置（1976）	1936 個
ロバートソンらの簡略化（1997）	633 個
Coq による形式化（ゴンティエ）	2005 年

観察 4.5

1936 個の配置を人が全部読み通すのは事実上不可能である。1997 年に 633 個まで減っても、まだ読み通せない——2005 年に機械が検証して、ようやく「誰かが全部見た」状態になった。

観察 4.6

正直に書くべき点——本稿は計算機による証明の当否を論じない。記録するのは $g \geq 1$ は手で片づき、 $g = 0$ は手では片づかなかったという事実だけである。

5. 向き付け不可能な側にも、例外が一つある

設定：向き付け不可能な曲面についても、対応する公式がある。

検算 5.1：

曲面	公式が返す値	実際
射影平面	6	6（一致）
クラインの壺	7	6（一致しない）
それ以外	公式どおり	一致

観察 5.2

クラインの壺が唯一の例外である（フランクリン、1934）。公式は 7 を返すが、6 色で足りる——ここでは値そのものが間違っている。

観察 5.3

したがって隔たりは二種類ある。

	値	証明
$g = 0$ （球面）	正しい	届かない
クラインの壺	間違っている	—

観察 5.4

二つは別の壊れ方である。球面では公式が当たっているのに理由が言えず、クラインの壺ではそもそも外れている——「公式が成り立たない」という一語が、二つを覆っている。

6. 分離子：値が正しいことと、証明が届くこと

観察 6.1

分離子——何を動かすと、 $g = 0$ が $g \geq 1$ と同じ身分になるか。論法である。曲面を動かす必要も、公式を直す必要もない——別の論法（可約配置の検査）を持ってくれば、値はそのままで身分が変わる。

観察 6.2

論文302 は「必ず現れる」が「いつ現れる」を教えないことを扱った。本稿は隔たりの向きが逆である——あちらは値が分からず、こちらは値が分かっている理由が言えなかった。

	存在	値
論文302（ラムゼー）	分かる	分からない
本稿（ $g = 0$ 、1890--1976）	分かる	分かる（が理由が言えない）

観察 6.3

したがって三つ目の欄が要る——根拠。論文163は「存在」と「構成」を分け、論文302は「存在」と「定量」を分けた——本稿は「値」と「根拠」を分ける。

観察 6.4

そして値が正しくても、根拠が別の場所から来ることがある。 $g=0$ の4は、ヒーウツドの公式が正しく予言したのではなく、別の証明が同じ数に到達したのである——公式は $g=0$ で「当たっている」だけである。

観察 6.5

正直に書くべき点—— $g=0$ で公式が「たまたま」当たっているとは言わない。4が出るのはオイラー標数の同じ評価からであり、無関係ではない——言えるのは、その評価が $g=0$ では最後の一步に届かないということだけである。

7. 点呼と結び

1. $g=0$ で4.000000（検算2.1）：床関数を取るまでもない。
2. $g=6$ と $g=7$ が同じ12（観察2.3）：床関数が潰す。
3. $g=0$ の上界は5止まり（検算3.4）：差はたった1。
4. その1に86年（観察3.5）：1890から1976。
5. $g \geq 1$ の決着は1968（検算4.1）：手で。
6. $g=0$ の決着は1976（検算4.1）：計算機で。
7. 可約配置1936個（検算4.4）：1997年に633個。
8. 形式化は2005年（検算4.4）：機械が全部を見た。
9. クラインの壺は7対6（検算5.1）：唯一の例外。
10. 壊れ方が二種類（観察5.4）：値か、根拠か。

結び：ヒーウツドの公式に $g=0$ を入れると4.000000が出る——四色定理の値そのものである。だがそれは四色定理の証明ではない。同じ論法は $g \geq 1$ では上界も下限も与えて定理になるのに、 $g=0$ では5色までしか下げられない——差はたった1であり、その1に86年かかった。そして順序が逆転した——トールスは1890

年に手で、 $g \geq 1$ 全体は 1968 年に手で片づき、最も単純な球面だけが 1976 年に計算機で片づいた。1936 個の可約配置は人が読み通せず、1997 年に 633 個へ減っても読み通せず、2005 年に機械が検証してようやく「誰かが全部見た」状態になった。分けるものは一つ——値が正しいことと、その値に証明が届くこと。二つは独立である。 $g = 0$ で公式が返す 4 は正しく、そしてその正しさは別の場所から来た。同じ一本の式が、定義域のたった一点で身分を変えている。

参考文献

1. Heawood, P. J. (1890). Map-Colour Theorem. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 24.
2. Franklin, P. (1934). A Six Color Problem. *Journal of Mathematics and Physics*, 13(1-4).
3. Ringel, G. and Youngs, J. W. T. (1968). Solution of the Heawood Map-Coloring Problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 60(2).
4. Appel, K. and Haken, W. (1977). Every Planar Map Is Four Colorable. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3).
5. Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P. and Thomas, R. (1997). The Four-Colour Theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 70(1).
6. Gonthier, G. (2008). Formal Proof — The Four-Color Theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 55(11).
7. 山岸勇輝 (2026). 等号にも別根がある — 第3版：山岸全同期方程式が結んでいたもの [論文16]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21600471
8. 山岸勇輝 (2026). 割り当てられた領域と、その中の自由 — 同じ韻を踏む六つの別根のセンス [論文112]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21962834
9. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
10. 山岸勇輝 (2026). 「構成できない」にも別根がある [論文179]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22098419

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)