

「容量」は、無限長でしか達成できない数である

— 符号長 100 では容量の 41.68% しか使えず、99.99% に届くには 3.4×10^9 が要る — C は最大値ではなく上限である — [論文304]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

シャノンの符号化定理は、通信路容量 C より低い速度なら誤りを任意に小さくできるという。本稿が問うのは、 C そのものは達成できるかである——答は、どんな有限の符号長でも達成できないである。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、容量は誤り率から決まる。二元対称通信路で $C = 1 - h(p)$ であり、 $p = 0.5$ で $C = 0$ になる（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。符号長 $n = 100$ では、容量の 41.68% しか使えない（第3節）。第三に、99% に届くには $n = 3.4 \times 10^5$ が要る。99.99% なら 3.4×10^9 である（第3節）。第四に、損失は $1/\sqrt{n}$ でしか減らない。 n を 100 倍にして、損失は 10 分の一である（第4節）。第五に、 C は最大値ではない。 $R = C$ ちょうどはどの n でも達成されず、 $n \rightarrow \infty$ ではじめて $R \rightarrow C$ になる（第5節）。第六に、分離子は「達成される最大値か、達成されない上限か」である（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——シャノンの符号化定理、二元対称通信路の容量、ガウス通信路の容量、有限長の正規近似は、いずれも標準的である。情報理論を作らない——使うのは一つの二値エントロピーと、一つの平方根だけである。符号化定理を証明しない——到達性も逆定理も引くだけである。符号を構成しない——どの符号が容量に近づくかは一切扱わない。論文163の「存在と構成」の区別が、ここでも生きている。正規近似の精度を主張しない—— $R(n, \epsilon) \approx C - \sqrt{V/nQ^{-1}(\epsilon)}$ は二次の近似であり、 n が小さいところでは誤差が大きい。 $n = 100$ の 41.68% は目安であって、厳密な達成可能速度ではない。実装を論じない——復号の手間も、遅延も、実際の符号の性能も扱わない。 C を批判しない——上限であることは欠陥ではない。達成されないことと、意味がないことは違う。通信路を一つに絞る——第3・4節はBSC($p = 0.11$) という一つの通信路での数である。他の通信路では V が変わり、必要な n も変わる。既刊との関係：論文252は「情報量」が四つあり要るものが違うと数えた——本稿の C はそのうちの一つ（相互情報量の上限）であり、達成条件を問う。論文294は分離が長さの平方根でしか良くならないと示した——本稿の $1/\sqrt{n}$ は同じ根（分散の加法性）から来る。論文163は「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」を分けた——本稿は三つ目、「どれだけ長ければ良いか」を扱う。論文302は存在が定量を教えないことを扱った——本稿は定量が答えられる場合であり、答が「無限」だった。加えたのは $n = 100$ で容量の 41.68% しか使えないと計算したこと、99%/99.99% に要る n を $3.4 \times 10^5 / 3.4 \times 10^9$ と出したこと、損失が $1/\sqrt{n}$ で減ると確かめたこと、 C が上限であって最大値でないと分離に据えたことである。

1. 記法と問い

設定：二元対称通信路 BSC(p) では、送ったビットが確率 p で反転する。容量は

$$C = 1 - h(p), \quad h(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p)$$

である。

シャノンの符号化定理： $R < C$ なら、誤り率を任意に小さくできる符号が存在する。

問い：では $R = C$ は達成できるか。そして $R < C$ は、どれだけの符号長で達成できるか。

観察 1.1

定理は「任意に小さくできる」と言う。「小さくなる」ではない——極限の言明であって、有限の言明ではない。

2. 容量は誤り率から決まる

検算 2.1 :

誤り率 p	$h(p)$	$C = 1 - h(p)$
0.000	0.000000	1.000000
0.010	0.080793	0.919207
0.050	0.286397	0.713603
0.110	0.499916	0.500084
0.250	0.811278	0.188722
0.500	1.000000	0.000000

観察 2.2

$p = 0.5$ で $C = 0$ である。ビットが半々で反転する通信路は何も運ばない——出力が入力と独立になるからである。

観察 2.3

$p = 0.11$ で $C = 0.500084$ 、すなわちほぼ半分である。以下ではこの通信路を使う—— C が切りのよい値に近く、比較しやすいからである。

観察 2.4

$p = 0$ と $p = 1$ では $C = 1$ である。全部反転する通信路も、無誤りの通信路と同じ容量を持つ——受け手が反転を知っていればよい。容量は誤りの多さではなく、誤りの予測不能性で決まる。

3. 芯：符号長 100 では、容量の 41.68%

設定：有限の符号長 n と、許す誤り率 ε を決めたときに達成できる速度は、正規近似で

$$R(n, \varepsilon) \approx C - \sqrt{\frac{V}{n}} Q^{-1}(\varepsilon)$$

と書ける（ V は通信路分散）。

検算 3.1 : $\text{BSC}(p = 0.11)$ 、 $\varepsilon = 10^{-3}$ 。

量	値
容量 C	0.500084
通信路分散 V	0.890702
$Q^{-1}(10^{-3})$	3.090232

検算 3.2 :

符号長 n	達成可能 R	C の何 %	損失 $C - R$
100	0.208437	41.68%	0.291647
1000	0.407857	81.56%	0.092227
10^4	0.470919	94.17%	0.029165
10^5	0.490861	98.16%	0.009223
10^6	0.497168	99.42%	0.002916
10^8	0.499792	99.94%	0.000292

観察 3.3

これが本稿の芯である。符号長 100 では容量の **41.68%** しか使えない—— C という数は、短い符号にとってはほとんど意味を持たない。

検算 3.4 : 逆に、 C の何割かに届くのに要る n を出す。

C の	要る符号長 n
99.00%	3.401×10^5
99.90%	3.401×10^7
99.99%	3.401×10^9

観察 3.5

99.99%に届くには **34** 億ビットの符号語が要る。一つの符号語がそれだけ長い——一割ごとに **100** 倍ずつ長くなる。

観察 3.6

正直に書くべき点——正規近似は n が小さいところで誤差が大きい。 $n = 100$ の **41.68%** は目安であって、厳密な達成可能速度ではない——示せるのは「短い符号では容量の半分も使えない」という桁の事実である。

4. 損失は $1/\sqrt{n}$ でしか減らない

検算 4.1 :

n の変化	損失 (前)	損失 (後)	倍率
$100 \rightarrow 10^4$	0.291647	0.029165	0.1000
$10^4 \rightarrow 10^6$	0.029165	0.002916	0.1000

観察 4.2

n を **100** 倍にして、損失はちょうど **10** 分の一になる。 $1/\sqrt{n}$ である——論文294 が示した「分離度は長さの平方根でしか良くならない」と同じ根（分散の加法性）から来ている。

観察 4.3

したがって代償は求める改善の二乗である。損失を **10** 分の一にするのに符号長 **100** 倍——論文294 の表と同じ数が、まったく別の分野に立っている。

観察 4.4

そしてどこまで行っても 0 にならない。 $\sqrt{V/n}Q^{-1}(\epsilon)$ は正の量であり、有限の n では必ず残る——これが第5節の芯につながる。

5. C は最大値ではなく、上限である

観察 5.1

損失 $\sqrt{V/n}Q^{-1}(\epsilon)$ は、どんな有限の n でも正である。したがって $R < C$ が常に厳密な不等号である—— $R = C$ は達成されない。

検算 5.2：身分を書き分ける。

	定義	達成されるか
最大値 (maximum)	集合に属する最大の元	される
上限 (supremum)	上界のうち最小のもの	されるときは限らない

観察 5.3

C は達成可能な速度の集合の上限であって、その最大値ではない。集合に属していない——開区間 $[0, C)$ の右端と同じ身分である。

観察 5.4

この区別は言葉の上のことではない。「容量 C の通信路」と言ったとき、 C ビット送れる装置は存在しない—— C に近い装置がいくらでも作れる、というだけである。

観察 5.5

ガウス通信路でも同じである。

S/N [dB]	$C = \frac{1}{2} \log_2(1 + S/N)$
0	0.500000
3	0.791341
10	1.729716
20	3.329106
30	4.983613

観察 5.6

こちらも達成には無限長のガウス符号語が要る。通信路が変わっても身分は変わらない—— C はどの通信路でも上限である。

6. 分離子：達成される最大値か、達成されない上限か

観察 6.1

分離子——何を動かすと、 C が達成されるようになるか。符号長を無限にすることである。有限のままでは、どんな符号でも届かない。

観察 6.2

これは論文266 と同じ構図である。標本化定理は正しく、その前提（帯域制限）は決して満たされない——本稿では定理は正しく、その極限（無限長）は決して実現されない。

	定理	満たされないもの
論文266（標本化）	正しい	前提（帯域制限）
本稿（符号化）	正しい	極限（無限長）

観察 6.3

二つは別の場所で届かない。前提は入口、極限は出口にある——どちらも「定理は正しい」という一語では区別できない。

観察 6.4

論文163は「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」を分けた。本稿は三つ目の文を置く——「良い符号は、どれだけ長ければ良いか」。答は 3.4×10^9 (C の99.99%、BSC(0.11)、 $\varepsilon = 10^{-3}$)である。

観察 6.5

正直に書くべき点——上限であることは欠陥ではない。 C は超えられない線を与えており、それだけで十分に有用である——本稿が言うのは、 C を「達成できる値」と読むと数を間違えるということだけである。

7. 点呼と結び

1. $p = 0.5$ で $C = 0$ (検算2.1) : 出力が入力と独立。
2. $p = 0$ と $p = 1$ で同じ $C = 1$ (観察2.4) : 予測不能性が効く。
3. $n = 100$ で 41.68% (検算3.2) : 半分も使えない。
4. 99% に 3.401×10^5 (検算3.4) : 99.99% には 3.4×10^9 。
5. 一割ごとに 100 倍 (観察3.5) : 34 億ビットの符号語。
6. n が 100 倍で損失 $1/10$ (検算4.1) : $1/\sqrt{n}$ 。
7. 論文294 と同じ根 (観察4.2) : 分散の加法性。
8. 損失は有限 n で必ず正 (観察4.4) : 0 にならない。
9. C は上限であって最大値でない (観察5.3) : 集合に属さない。
10. 論文266 と壊れる場所が違う (観察6.3) : 前提か、極限か。

結び：シャノンの符号化定理は「 $R < C$ なら誤りを任意に小さくできる」と言う。だが C そのものは、どんな有限の符号長でも達成されない。BSC($p = 0.11$)、誤り率 10^{-3} で数えれば、符号長 100 では容量の 41.68% しか使えない——99% に届くには 3.401×10^5 、99.99% には 3.4×10^9 、すなわち 34 億ビットの符号語が要る。損失は $1/\sqrt{n}$ でしか減らない—— n を 100 倍にして損失は 10 分の一であり、論文294 が分離度について示した

のと同じ根（分散の加法性）から来ている。そしてどんな有限の n でも損失は正である—— C は達成可能な速度の集合の最大値ではなく、上限である。分けるものは一つ——その数が集合に属するか、属さないか。「容量 C の通信路」と言っても、 C ビット送れる装置は存在しない。存在するのは、 C に近い装置がいくらでも作れるという事実だけである。

参考文献

1. Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3-4).
 2. Polyanskiy, Y., Poor, H. V. and Verdu, S. (2010). Channel Coding Rate in the Finite Blocklength Regime. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56(5).
 3. Strassen, V. (1962). Asymptotische Abschätzungen in Shannons Informationstheorie. In *Transactions of the Third Prague Conference on Information Theory*.
 4. Cover, T. M. and Thomas, J. A. (2006). *Elements of Information Theory*. Hoboken: Wiley.
 5. Gallager, R. G. (1968). *Information Theory and Reliable Communication*. New York: Wiley.
 6. 山岸勇輝 (2026). 「良い符号が在る」と「これが良い符号だ」は、別の文である [論文163]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22092677
 7. 山岸勇輝 (2026). 「情報量」は四つあり、要るものが違う [論文252]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22161148
 8. 山岸勇輝 (2026). 標本化定理は正しく、その前提は決して満たされない [論文266]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22169765
 9. 山岸勇輝 (2026). 分離は、長さの平方根でしか良くならない [論文294]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171603
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)