

あなたが乗るバスの間隔は、平均の 2 倍である

— 「平均」が二つあり、乗客が落ちる間隔のほうが長い — 比は $1 + CV^2$ で、等間隔なら 1、ポアソンならちょうど 2 である — [論文308]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

バスが平均 10 分間隔で来るとする。あなたが乗るバスの前の間隔は、平均して何分か。本稿が問うのは、「平均間隔」が一つの量かである——答は、二つあるである。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、バス側の平均は 10 分である。ポアソン過程なら間隔は指数分布で、平均が 10 分になる（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。あなたが落ちる間隔の平均は 20 分であり、ちょうど 2 倍である（第2節）。第三に、待ち時間も 10 分である。直前のバスからの経過も 10 分で、 $10 + 10 = 20$ （第3節）。第四に、離散の例で手で確かめられる。間隔 5, 5, 5, 5, 20 でバス側 8.0 分、乗客側 12.5 分である（第4節）。第五に、一般則は $1 + CV^2$ である。等間隔なら 1、ポアソンなら 2（第5節）。第六に、分離子は「誰を標本にしたか」である（第6節）。

本稿の射程 (scope note) : 新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ポアソン過程、指数分布の無記憶性、検査パラドックス、長さバイアスは、いずれも標準的である。確率過程を作らない——使うのは一つの重み付き平均と、一つの変動係数だけである。待ち行列理論を作らない——混雑も、サービス時間も、複数路線も一切扱わない。実際のバスを論じない——現実の運行は等間隔に近く、ポアソンではない。2 倍は「間隔が完全にランダムなら」の値である。ポアソンを仮定していることを隠さない——第2・3節は到着がポアソン過程であることに立つ。現実のばらつきは $CV < 1$ のことが多く、そのぶん比は 2 より小さい (第5節)。乗客の到着も一様と仮定する——時刻表を見て来る乗客には当てはまらない。でたらめな時刻に来る場合の話である。パラドックスと呼ぶが矛盾ではない——二つの平均は別の量であり、食い違って当然である。「パラドックス」は驚きの名であって、矛盾の名ではない。既刊との関係 : 論文220 は「独立」が四つあり、たがいに何も言わないと数えた——本稿は「平均」が二つあり、標本の取り方で分かれる場合である。論文194 は四つの平均が一つの族だと示した——あちらは同じ標本に対する四つの平均、本稿は同じ量に対する二つの標本の取り方であり、分かれる場所が違う。論文292 は足せるのは対数だけだと示した——本稿も素朴な平均が答を外す場合である。論文255 は「精度」が二つあり較正で消えるのは一方だけだと分けた——本稿の長さバイアスは標本の取り方に由来し、精度を上げて消えない。加えたのは乗客側の平均が 20 分でバス側の 2 倍だと計算したこと、離散の例で 8.0 対 12.5 と手で確かめたこと、一般則を $1 + CV^2$ と書いたこと、分離子を「誰を標本にしたか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定 : バスがポアソン過程で到着する。到着率 $\lambda = 1/10$ (毎分)、すなわち平均間隔 10 分である。

あなたは時刻表を見ずに、でたらめな時刻にバス停へ行く。

問い : あなたが乗るバスの、その前のバスからの間隔は、平均して何分か。

観察 1.1

素朴には 10 分と答えたい。バスの平均間隔が 10 分だからである——だが違う。

2. 芯 : あなたが落ちる間隔の平均は 20 分である

観察 2.1

理由は長さバイアスである。長い間隔ほど、そこに落ちる確率が高い——20 分の間隔は 5 分の間隔の 4 倍の時間を占めるので、4 倍落ちやすい。

検算 2.2：間隔の分布を $f(x)$ とすると、あなたが落ちる間隔の分布は $xf(x)/E[x]$ である（長さで重み付け）。指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ なら、形状 2 のガンマ分布になる。

量	値
バスの間隔の平均 $1/\lambda$	10.0000 分
あなたが落ちる間隔の平均 $2/\lambda$	20.0000 分
比	2.0000 倍

観察 2.3

これが本稿の芯である。バスの平均間隔は 10 分、あなたが乗るバスの間隔は 20 分——どちらも正しく、ちょうど 2 倍違う。

観察 2.4

矛盾ではない。標本の取り方が違う——バス側はバスを等しく数え、乗客側は時間を等しく数える。同じ列を、別の重みで見ている。

3. 待ち時間も 10 分で、合わせて 20 分になる

検算 3.1：

量	値
あなたの待ち時間の平均	10.0000 分
直前のバスからの経過時間の平均	10.0000 分
合計（＝落ちた間隔）	20.0000 分

観察 3.2

待ち時間が 10 分なのは無記憶性による。指数分布は「どれだけ待ったか」を覚えていないので、いつ来ても残り 10 分である——5 分待った後でも、まだ平均 10 分待つ。

観察 3.3

前後が対称であることに注意する。前に 10 分、後に 10 分——だから合わせて 20 分の間隔に落ちている。

観察 3.4

ここに気持ちの悪さの正体がある。「平均 10 分間隔」と聞けば「平均 5 分待つ」と思うのに、実際は 10 分待つ——待ち時間もまた 2 倍である。

観察 3.5

正直に書くべき点——これはポアソンを仮定した値である。現実のバスは等間隔に近く運行される——そのぶん比は 2 より小さい（第5節）。

4. 離散の例で、手で確かめられる

設定：間隔が 5, 5, 5, 5, 20 分（合計 40 分）の一日を考える。

検算 4.1：

	計算	値
バス側の平均	$40/5$	8.0000 分
乗客側の平均	$\sum g^2 / \sum g = 500/40$	12.5000 分
比		1.5625 倍

観察 4.2

20 分の間隔は、全体 40 分のうち**50%**の時間を占める。ところがバスの本数では 5 本中 1 本、すなわち **20%** にすぎない——時間で数えるか、本数で数えるかの差である。

観察 4.3

したがって乗客の半分は 20 分の間隔に落ちる。バスの側から見れば「ほとんどの便は 5 分間隔」なのに——乗る側から見れば「半分は 20 分待ちの回」である。

観察 4.4

この例は手で全部確かめられる。 $500 = 5^2 \times 4 + 20^2 = 100 + 400$ 、 $500/40 = 12.5$ ——確率論を使わずに、同じ現象が出る。

5. 一般則は $1 + CV^2$ である

設定：間隔の平均を μ 、標準偏差を σ 、変動係数を $CV = \sigma/\mu$ とすると、比は $1 + CV^2$ である。

検算 5.1：

運行	CV	比 $= 1 + CV^2$
等間隔 (10,10,10,10,10)	0.0000	1.0000
第4節の例 (5,5,5,5,20)	0.7500	1.5625
ポアソン (指数分布)	1.0000	2.0000

観察 5.2

等間隔ならバイアスは無い（比 1）。すべての間隔が同じなら、どこに落ちてでも同じだからである——バイアスはばらつきから生まれる。

観察 5.3

そしてポアソンでちょうど 2 である。指数分布の CV がちょうど 1 だからである—— $1 + 1^2 = 2$ 。

観察 5.4

CV が 1 を超えれば 2 を超える。バスが団子になって走るなら ($CV > 1$)、待ち時間はさらに悪化する——実際にバスが団子になるのは、遅れたバスほど客を多く拾うためであり、これは別の機構である。

観察 5.5

論文255 は「精度」が二つあり、較正で消えるのは一方だけだと分けた。ここでの長さバイアスは標本の取り方に由来する——時計を精密にしても、標本を増やしても消えない。

6. 分離子：誰を標本にしたか

観察 6.1

分離子——何を動かすと、10 分と 20 分が入れ替わるか。何を等しく数えるかである。

何を等しく数えるか		答
バス側の平均	バスを 1 本ずつ	10 分
乗客側の平均	時間を 1 分ずつ	20 分

観察 6.2

二行とも正しい平均である。標本が違うだけである——「平均間隔は何分か」という問いが、二つの問いを覆っている。

観察 6.3

同じ構造は他にもある。

場面	対象側の平均	標本側の平均
バス	バス 1 本ずつ	時間で重み
学級規模	学級 1 つずつ	生徒で重み（大きい学級に多く居る）
友人の数	人 1 人ずつ	辺で重み（友達が多い人ほど友人に選ばれる）

観察 6.4

三行とも同じ長さバイアスである。「あなたの友人は、平均してあなたより友人が多い」という命題もここから出る——一つの機構が、三つの現象を覆っている。

観察 6.5

論文220 は「独立」が四つあり、たがいに何も言わないと数えた。本稿の二つの平均もたがいに何も言わない——片方を知っても、他方は *CV* を知らねば出ない。

観察 6.6

正直に書くべき点——これは矛盾ではない。「パラドックス」という名は驚きに付いた名であって、矛盾に付いた名ではない——二つの平均は別の量であり、食い違って当然である。

7. 点呼と結び

1. バス側の平均は 10.0000 分（検算2.2）：ポアソン過程。
2. 乗客側の平均は 20.0000 分（検算2.2）：ちょうど 2 倍。
3. 待ち時間も 10.0000 分（検算3.1）：無記憶性による。
4. 前後が対称（観察3.3）： $10 + 10 = 20$ 。

5. 離散例でバス側 **8.0000** 分（検算4.1）：乗客側 **12.5000** 分。
6. **20** 分は時間の **50%**（観察4.2）：本数では **20%**。
7. 等間隔なら比 **1.0000**（検算5.1）：バイアスはばらつきから。
8. ポアソンで $CV = 1$ （観察5.3）： $1 + 1^2 = 2$ 。
9. 学級規模・友人の数も同じ（観察6.3）：一つの機構。
10. 矛盾ではない（観察6.6）：別の量である。

結び：バスが平均 **10** 分間隔で来るとき、あなたが乗るバスの間隔は平均 **20** 分である。ちょうど **2** 倍であり、どちらも正しい——バス側はバスを等しく数え、乗客側は時間を等しく数えるからである。待ち時間も同じ理屈で **10** 分になる——無記憶性により、前に **10** 分、後に **10** 分で、合わせて **20** 分の間隔に落ちている。離散の例なら手で確かめられる——間隔 **5, 5, 5, 5, 20** で、バス側 **8.0** 分に対し乗客側 **12.5** 分。**20** 分の間隔は本数では **20%** にすぎないのに、時間では **50%** を占める。一般則は $1 + CV^2$ である——等間隔なら **1**（バイアス無し）、ポアソンなら $CV = 1$ でちょうど **2**。バイアスはばらつきから生まれる。分けるものは一つ——何を等しく数えたか。同じ機構が、学級規模にも、友人の数にも効いている。「あなたの友人は、平均してあなたより友人が多い」も、ここから出る。

参考文献

-
1. Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II*. New York: Wiley.
 2. Cox, D. R. (1962). *Renewal Theory*. London: Methuen.
 3. Ross, S. M. (1996). *Stochastic Processes*. New York: Wiley.
 4. Feld, S. L. (1991). Why Your Friends Have More Friends Than You Do. *American Journal of Sociology*, 96(6).
 5. Hemenway, D. (1982). Why Your Classes Are Larger Than “Average”. *Mathematics Magazine*, 55(3).
 6. 山岸勇輝 (2026). 四つの平均は一つの族であり、等号の柵は一つしかない [論文194]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22106809
 7. 山岸勇輝 (2026). 「独立」は四つあり、たがいに何も言わない [論文220]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22119838
 8. 山岸勇輝 (2026). 「精度」は二つあり、較正で消えるのは一方だけ [論文255]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22168883
 9. 山岸勇輝 (2026). 足せるのは対数だけである [論文292]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171519
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)