

次元を持たない π

— ラマヌジャンの級数・AGM・BBP：立体角の π と、周期としての π — [論文31]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

体系は 4π を追いついてきた。本稿は π そのものに同じ検査を当てる——次元 d を動かしたとき、その π は動くか。新しい数学定理は主張しない。第一に、珍しく「同根」を確認する回である。立体角の π とガウス積分の π は同じ根を持つ： $\text{Vol}(S^{d-1}) = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ であり、 $\mathbb{R}^d$ 上のガウス積分は $\pi^{d/2}$ である。 $\pi^{d/2}$ を一切仮定しない再帰だけで球の体積を積分し、 $d=2$ から 8 まで一致を確認した（差は 10^{-120} 台）（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。ラマヌジャンの級数の π には d が無い。

$1/\pi = (2\sqrt{2}/9801) \sum_k (4k)! (1103 + 26390k) / ((k!)^4 396^{4k})$ のどこにも次元は現れず、動かすべきものが無い。体系自身の検査（次元非依存性、論文129）によれば、この π は立体角ではない——モジュラー形式の周期である（第3節）。第三に、桁の点呼。ライプニッツ級数は 10^6 項で 6 桁、ラマヌジャンは一項あたり約 8 桁、チュドノフスキーは約 14 桁である（本稿で計算）。三つとも「線形」であり、違うのは定数だけである（第4節）。第四に、「速い」も三つの別根を持つ。ガウス＝ルジャンドル（AGM）は桁が **3, 8, 19, 40, 84, 171, 345** と倍々に増える——定数が大きいのではなく、増え方の法則が違う。BBP はどちらの意味でも速くないが、 n 番目の十六進数字を前の $n-1$ 個なしに与える（本稿で第 **1, 2, 10, 50, 100, 200** 位を照合、全一致）（第5節）。第五に、ブレーキ。 $e^{\pi\sqrt{163}}$ は偶然でもなく、整数でもない。 **$640320^3 + 744$** との差は 7.49927×10^{-13} である（本稿で計算）（第6節）。

本稿の射程：新しい数学定理は主張しない。ラマヌジャンの級数、チュドノフスキーの級数、ガウス＝ルジャンドルのアルゴリズム、BBP 公式、類数 1 の虚二次体と j 不変量はいずれも標準的である。加えたのは体系の次元検査を π 自身に当てたこと、立体角の π とガウスの π が同根であると確認したこと、「速い」の三つの根に住所を書いたこと、 $e^{\pi\sqrt{163}}$ について流通する二つの言い方の両方に柵を立てたことである。

1. 記法と位置づけ

$\text{Vol}(S^{d-1})$ は $\mathbb{R}^d$ の単位球面の面積、 V_d は単位球の体積を表す。「桁」とは π との相対誤差の常用対数の符号を変えたものをいう。

位置づけ：論文129 は次元に依存しないことをもって「その 4π は立体角でない」と判定した。論文130 は逆にビオ＝サヴァールの 4π が $(d-2)\text{Vol}(S^{d-1})$ として次元とともに動くことを示した。本稿はその検査を π そのものに当てる。

2. 立体角の π とガウス積分の π は同根である

検算 2.1： $\pi^{d/2}$ を仮定しない再帰 $V_d = \int_{-1}^1 V_{d-1}(1-x^2)^{(d-1)/2} dx$ 、 $V_1 = 2$ で体積を積分し、 $\text{Vol}(S^{d-1}) = dV_d$ を $2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ と比べる。

d	dV_d (積分)	$2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$	差
2	6.2831853071796	6.2831853071796	0.0
3	12.566370614359	12.566370614359	0.0
4	19.739208802179	19.739208802179	0.0
5	26.318945069572	26.318945069572	-3.098×10^{-120}
6	31.0062766803	31.0062766803	0.0
7	33.07336179232	33.07336179232	-6.196×10^{-120}
8	32.469697011334	32.469697011334	0.0

さらに $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^d = \pi^{d/2}$ を $d = 2, 3, 6$ で確認した (差は 0 ないし 10^{-120} 台)。(証明終)

観察 2.2

立体角の π とガウス積分の π は、同じ根を持つ。どちらも指数 $d/2$ を担い、 d を動かせば一緒に動く——そもそもガウス積分は、球面の面積を計算する道具そのものである。

観察 2.3

体系が「同根」を確認するのは珍しい（論文142 に続く二度目）。別根を数えることと同じだけ、同根を確かめることは点呼の一部である。

3. 芯：ラマヌジャンの π には d が無い

事実 3.1（ラマヌジャン 1914）：

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k \geq 0} \frac{(4k)! (1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}.$$

観察 3.2

この式のどこにも次元 d は現れない。したがって d を動かしても、動くものが何も無い。

観察 3.3

体系の検査（論文129）は、次元非依存性をもって「その π は立体角でない」と判定する。ここでの π はモジュラー形式の周期として現れており、球面とは無関係である。同じ記号が、二つの別の理由で紙の上に現れている。

観察 3.4

これは「 π が二つある」という意味ではない。数としては一つである。別なのは、なぜそれが現れねばならないかという理由の方である——論文95 以来、体系はこの区別を「住所」と呼んできた。

4. 桁の点呼

検算 4.1

項数	ラマヌジャン（桁）	チュドノフスキー（桁）
1	7	13
2	15	28
3	23	42
4	31	56
5	39	70
6	47	84

ライプニッツの項数	正しい桁
10	1
10^3	3
10^5	5
10^6	6

（証明終）

観察 4.2

ライプニッツは k 桁に約 10^k 項を要する。ラマヌジャンは一項あたり約 8 桁、チュドノフスキーは約 14 桁。しかし三つとも「一項あたり一定の桁数」という同じ型であり、違うのは定数だけである。

5. 「速い」は三つの別根を持つ

検算 5.1（ガウス＝ルジャンドル、AGM）：反復ごとの正しい桁数は

$$3, \quad 8, \quad 19, \quad 40, \quad 84, \quad 171, \quad 345$$

であった（本稿で 500 桁精度により計算）。（証明終）

観察 5.2

桁が倍々に増えている。これは「定数が大きい」のではなく、増え方の法則そのものが違う——線形と二次は、別の根である。

検算 5.3 (BBP) : π の十六進展開の第 n 位を、前の $n - 1$ 位を計算せずに求める。

位	BBP	参照値	一致
1	2	2	はい
2	4	4	はい
10	5	5	はい
50	8	8	はい
100	c	c	はい
200	5	5	はい

(証明終)

観察 5.4

BBP はどちらの意味でも速くない。一項あたりの桁も多くなく、倍々にもならない。与えるのはランダムアクセスである——三つの「良いアルゴリズム」のあいだに順序は無い。どれが良いかは、何を欲し
いかで決まる。

6. ブレーキ : $e^{\pi\sqrt{163}}$ は偶然でもなく、整数でもない

検算 6.1

$e^{\pi\sqrt{163}}$	262537412640768743.999999999992500725972
640320^3	262537412640768000
$640320^3 + 744$	262537412640768744
差	7.49927×10^{-13}

(証明終)

観察 6.2

流通する二つの言い方は、どちらも誤りである。「ただの偶然だ」は誤りで、 640320^3 は類数 1 の虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ に対する j 不変量の値であり、 j の q 展開が一致を強制している。「実は整数だ」も誤りで、 7.5×10^{-13} だけ外れる。

観察 6.3

そして同じ 640320 が、チュドノフスキーの級数に現れる。第4節の 14 桁は、この体の類数が 1 であることの帰結である——速さの出所も、 π の出所と同じ場所にある。

7. 点呼

観察 7.1

π の現れ方	d を動かすと	住所
立体角 $\text{Vol}(S^{d-1})$	$\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ で動く	幾何
ガウス積分 $\pi^{d/2}$	同じ根：一緒に動く	幾何（上と同一）
ラマヌジャンの級数	動かない（ d が無い）	モジュラー形式の周期

観察 7.2

「速い」の意味	増え方	例
一項あたりの桁が多い	線形	ラマヌジャン (8)、チュドノフスキー (14)
桁が倍になる	二次	ガウス＝ルジャンドル (AGM)
n 番目だけ取り出せる	—	BBP

8. 結論

- 1. 立体角の π とガウスの π は同根である (検算2.1)。どちらも $d/2$ 乗を担う。
 - 2. ラマヌジャンの π には d が無い (観察3.2)。ゆえに立体角ではない。
 - 3. 桁は線形に増える (検算4.1)。8 と 14 は定数の違いにすぎない。
 - 4. AGM は桁を倍にする (検算5.1)。3, 8, 19, 40, 84, 171, 345。
 - 5. BBP が与えるのはランダムアクセスである (検算5.3)。三つの「速い」に順序は無い。
 - 6. $e^{\pi\sqrt{163}}$ は偶然でも整数でもない (検算6.1)。差は 7.49927×10^{-13} 。
- 結び： π を見たら円を思う、という習慣は強い。だが d を動かしてみると、動く π と動かない π がある。ラマヌジャンの紙の上の π は、円から来たのではなかった。

参考文献

1. Ramanujan, S. (1914). *Modular equations and approximations to π* . Quarterly Journal of Mathematics, 45.

2. Borwein, J. M., & Borwein, P. B. (1987). *Pi and the AGM*. Wiley.

3. Salamin, E. (1976). *Computation of π using arithmetic-geometric mean*. Mathematics of Computation, 30(135).

4. Brent, R. P. (1976). *Fast multiple-precision evaluation of elementary functions*. Journal of the ACM, 23(2).

5. Chudnovsky, D. V., & Chudnovsky, G. V. (1989). *The computation of classical constants*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 86(21).

6. Bailey, D. H., Borwein, P. B., & Plouffe, S. (1997). *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*. Mathematics of Computation, 66(218).

7. Cox, D. A. (1989). *Primes of the Form $x^2 + ny^2$* . Wiley.

8. 山岸勇輝 (2026). 規約と事実 [論文95]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758621
9. 山岸勇輝 (2026). 次元の持ち上げ [論文109]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837375
10. 山岸勇輝 (2026). 二本の階段 [論文115]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21967686
11. 山岸勇輝 (2026). 不確定性は一つの定理ではない [論文129]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079681
12. 山岸勇輝 (2026). 渦線は法則でなく恒等式である [論文130]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079996
13. 山岸勇輝 (2026). 生き残るのは 2π だけである [論文142]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22082281

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)