

どの次元が特別かは、問いごとに違う

— 面積の勘定は **14** を許すのに、入るのは **12** である — 正二十面体の十二個には **3.434949** 度の余りがあり、それでも十三個目は入らない — [論文315]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

論文59 は単位球の体積が **5** 次元で最大になると示し、論文64 は「単一の魔法の次元は存在しない」と結んだ。本稿が問うのは、球を詰める問いはどの次元を選ぶかである——答は、**8** と **24** である。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、条件は角度一つである。隣り合う球の中心は、中心から見て**60** 度以上離れていなければならない（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。面積の勘定は **14** 個まで許すのに、実際に入るのは **12** 個である（第3節）。第三に、余りがあるのに入らない。正二十面体に置いた十二個は最小離角 **63.434949** 度で、**3.434949** 度も余っている（第4節）。第四に、決着に **259** 年かかった。**1694** 年のニュートンとグレゴリーの論争が、**1953** 年に閉じた（第4節）。第五に、厳密に分かっている次元は六つしかない。**1・2・3・4・8・24** であり、**8** → **24** で **819** 倍跳ぶ（第5節）。第六に、分離子は「何を最大化するか」である。体積は **5**、閉軌道は **3**、充填は **8** と **24** を選ぶ（第6節）。

本稿の射程（射程注記）：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——接吻数、球充填の密度、 E_8 格子とリーチ格子、シュッテ＝ファン・デル・ヴェルデンの決着、ヴィアゾフスカの証明は、いずれも標準的である。幾何学を作らない——使うのは一つの角度と、一つの面積比だけである。接吻数を証明しない——12 が上限であることの証明には立ち入らない。12 が入ることは自分で構成して確かめ、13 が入らないことは引くだけである。格子を作らない—— E_8 格子とリーチ格子の構成には立ち入らない。未解決の次元に数を書かない—— $d = 5$ 以上（8・24 を除く）の接吻数は上下の限界が一致しておらず、本稿は具体的な数を書かない。符号理論に立ち入らない——球充填と誤り訂正符号の対応は扱わない。既刊との関係：論文59 は単位球の体積が 5 次元で最大になると示した——本稿は同じ「特別な次元」を、別の問いで選び直す。答は 5 ではなく 8 と 24 になる。論文64 は「単一の魔法の次元は存在しない」と結んだ——本稿はその結論に、独立な実例をもう一つ足す。論文69 は $3 + 1$ 次元が独立な根の過剰決定だと書いた——充填はその過剰決定に参加していない。3 を選ばないからである。論文182 は「次元の呪い」が一つの呪いではないと示した——本稿は「次元の恵み」の側にも複数あることを示す。論文279 は四次元より上で自己回避の代価が消えると示した——高次元がすべて単調に易しくなるわけではないという点で、本稿と同じ向きである。加えたのは面積の勘定が 14 を許すことを計算したこと、正二十面体配置の最小離角を 63.434949 度と出して余りを 3.434949 度と測ったこと、厳密に決まっている次元が六つだけだと並べたこと、体積・閉軌道・充填が別々の次元を選ぶと対照したことである。

1. 記法と問い

設定：同じ大きさの球を一つ置き、それに触れるように同じ大きさの球を並べる。何個まで置けるか——この個数を接吻数という。

観察 1.1

論文59 は単位球の体積が 5 次元で最大になると示し、論文64 は単一の魔法の次元は存在しないと結んだ。論文69 は $3 + 1$ 次元を独立な根の過剰決定として書いた。

問い：では、球を詰める問いは、どの次元を選ぶのか。

観察 1.2

答は 8 と 24 である。体積の 5 でも、軌道の 3 でもない——問いが変われば、特別な次元が変わる。

2. 条件は、角度一つである

検算 2.1：半径 1 の球を中心に置く。触れる球の中心は距離 2 にあり、隣り合う二つの中心も距離 2 以上離れていなければ重なる。

観察 2.2

三角形の二辺が 2、対辺が 2 以上——余弦定理から中心から見た離角は 60 度以上である。

量	値
中心から隣の中心までの距離	2
隣どうしの最小距離	2
必要な最小離角	60.000000 度

観察 2.3

問題はここで球面上の点配置に化けた。半径も体積も消え、残ったのは角度だけである——論文31 が「 π は次元を持たない」と書いたのと同じ場所で、尺度が落ちている。

3. 芯：面積の勘定は 14 を許すのに、入るのは 12 である

設定：各球は、中心球の表面に角半径 30 度の帽子を占める（離角 60 度の半分）。球面をその帽子で覆う個数の上限を数える。

検算 3.1：

量	値
帽子の面積 / 球面の面積 = $(1 - \cos 30^\circ)/2$	0.06698730
その逆数	14.928203
面積の勘定が許す個数	14
実際に入る個数 ($d = 3$)	12

観察 3.2

これが本稿の芯である。面積の勘定は 2 個ぶん多く許してしまう——帽子は球面を隙間なく敷き詰められないからである。

観察 3.3

この 2 の差が、259 年ぶんの難しさである（第4節）。上限が 14 で真値が 12 のとき、13 を排除する議論が要る——面積では届かない。

観察 3.4

論文224 は「どこを触っても平らで、それでも合計は 4π である」と書いた。ここでも局所の勘定と全体の勘定が食い違っている——面積を足すだけでは、置けるかどうかは決まらない。

4. 余りがあるのに、十三個目は入らない

設定：12 個を置く配置は一つではない。立方八面体（頂点を $(\pm 1, \pm 1, 0)$ の置換に取る）と、正二十面体で比べる。

検算 4.1：最小離角を計算する。

配置	点の数	最小離角
立方八面体	12	60.000000 度（ちょうど触れる）
正二十面体	12	63.434949 度
必要な最小	—	60 度

観察 4.2

正二十面体の十二個は 3.434949 度も余っている。どの球も隣に触れておらず、全部が動かせる——隙間は目に見えて在る。

観察 4.3

それでも十三個目は入らない。隙間は在るが、一箇所に集められない——在ることと、使えることは別である。

検算 4.4：歴史を並べる。

年	出来事
1694	ニュートンは 12 、グレゴリーは 13 と考えた
1953	シュッテ＝ファン・デル・ヴェルデンが 12 と決着
差	259 年

観察 4.5

グレゴリーが誤ったのは、隙間を見たからである。**3.434949** 度の余りは実在する——見えている余りが使えるとは限らないという一点だけを、彼は取り違えた。

観察 4.6

正直に書くべき点——本稿は **13** が入らないことを証明していない。**12** が入ることは上の座標で自分で確かめた——上限の証明は引くだけである。

5. 厳密に分かっている次元は、六つしかない

検算 5.1：

d	接吻数	前の行との比
1	2	—
2	6	3.0000
3	12	2.0000
4	24	2.0000
8	240	10.0000
24	196560	819.0000

観察 5.2

この六つ以外は、上下の限界が一致していない。 $d = 5$ でさえ厳密には分かっていない——**3** の隣が空いているのである。

検算 5.3：充填密度で証明されているものを並べる。

d	密度	決着
1	1.0000000000	自明
2	0.9068996821	トゥエ 1910
3	0.7404804897	ヘイルズ 1998
8	0.2536695079	ヴィアゾフスカ 2016
24	0.0019295743	コーンら 2016

観察 5.4

同じ顔ぶれである—— $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 24$ 。接吻数が分かる次元と、密度が分かる次元が、ほぼ一致している——偶然ではなく、どちらも同じ格子 (E_8 とリーチ) が答を与えているからである。

観察 5.5

密度は次元とともに落ちていく。 $d = 24$ では 0.0019295743——高次元の空間はほとんど隙間である。論文182 が「次元の呪い」を数えたのと同じ現象の、別の顔である。

6. 分離子：何を最大化するか

観察 6.1

分離子——どの量を最大にするかを問うているか。

問い	選ばれる次元	出典
単位球の体積が最大	5	論文59
軌道が閉じる・波が鋭く伝わる	3	論文64・69
$4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つ	3	論文128
自己回避の代価が消える	4 以上	論文279
球の詰まり方が特別	8 と 24	本稿

観察 6.2

五つの問いが、四つの別の答を返す。論文64 が「単一の魔法の次元は存在しない」と結んだことの、独立な実例がもう一つ増えた——しかも今回の答は、これまでのどれとも重ならない。

観察 6.3

論文300 の判定基準を当てる。

基準	結果
恒等性を保つ対応があるか	いいえ。体積と充填を結ぶ構成は無い
変数を動かしても一致するか	いいえ。 d を動かすと答が分かれる
同じ量が入っているか	いいえ。片方は積分、他方は格子

観察 6.4

三つとも「いいえ」である——「特別な次元」は別根が複数ある一語である。論文16が「=」に六つの根を見つけ、論文313が「同期」に四つを見つけたのと、同じ型である。

観察 6.5

最後に一つ——8と24が特別なのは、そこに特別な格子が在るからである。 E_8 とリーチ格子——次元そのものが特別なのではなく、その次元に住める対象が特別なのである。主語を取り違えないことが、ここでの規律である。

7. 点呼と結び

1. 必要な離角は 60 度（検算2.1）：半径も体積も消える。
 2. 面積の勘定は 14 を許す（検算3.1）：0.06698730 の逆数。
 3. 実際に入るのは 12（検算3.1）：2 個ぶん過大。
 4. 立方八面体はちょうど 60 度（検算4.1）：触れている。
 5. 正二十面体は 63.434949 度（検算4.1）：3.434949 度の余り。
 6. それでも 13 は入らない（観察4.3）：在ることと使えることは別。
 7. 決着に 259 年（検算4.4）：1694 → 1953。
 8. 厳密なのは六次元だけ（検算5.1）：8 → 24 で 819 倍。
 9. 密度も同じ顔ぶれ（検算5.3）： E_8 とリーチが答を与える。
 10. 五つの問い、四つの答（観察6.1）：特別な次元は一つではない。
- 結び：論文59は単位球の体積が5次元で最大になると示し、論文64は「単一の魔法の次元は存在しない」と結んだ。球を詰める問いは、8と24を選ぶ——体積の5でも、軌道の3でもない。条件は角度一つである——隣

り合う中心は**60**度以上離れていなければならず、そこで半径も体積も消えて、球面上の点配置に化ける。そして面積の勘定は**14**個まで許すのに、実際に入るのは**12**個である——帽子が球面を敷き詰められないからで、この**2**の差が難しさの正体である。正二十面体に置いた十二個は最小離角**63.434949**度、必要な**60**度より**3.434949**度も余っている——どの球も触れておらず、全部が動く。それでも十三個目は入らない。グレゴリーが誤ったのは、隙間を見たからである——**1694**年の論争が閉じたのは**1953**年、**259**年後であった。厳密に分かっている次元は六つだけ—— $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 24$ で、 $8 \rightarrow 24$ で**819**倍跳ぶ。密度が証明されている顔ぶれもほぼ同じである。分けるものは一つ——どの量を最大にするかを問うているか。体積は**5**、閉軌道は**3**、 $4\pi = 2\pi\chi$ は**3**、自己回避は**4**以上、充填は**8**と**24**——五つの問いが四つの別の答を返す。最後に一つ——**8**と**24**が特別なのは、そこに E_8 格子とリーチ格子が在るからである。次元が特別なのではなく、その次元に住める対象が特別なのであり、主語を取り違えてはいけない。

参考文献

1. Schütte, K. and van der Waerden, B. L. (1953). Das Problem der dreizehn Kugeln. *Mathematische Annalen*, 125(1).
2. Conway, J. H. and Sloane, N. J. A. (1999). *Sphere Packings, Lattices and Groups*, 3rd edition. New York: Springer.
3. Hales, T. C. (2005). A Proof of the Kepler Conjecture. *Annals of Mathematics*, 162(3).
4. Viazovska, M. S. (2017). The Sphere Packing Problem in Dimension 8. *Annals of Mathematics*, 185(3).
5. Cohn, H., Kumar, A., Miller, S. D., Radchenko, D. and Viazovska, M. (2017). The Sphere Packing Problem in Dimension 24. *Annals of Mathematics*, 185(3).
6. Musin, O. R. (2008). The Kissing Number in Four Dimensions. *Annals of Mathematics*, 168(1).
7. 山岸勇輝 (2026). 次元を持たない π [論文31]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22090430
8. 山岸勇輝 (2026). 単位球の体積は **5** 次元で最大になる (第2版) [論文59]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21597865
9. 山岸勇輝 (2026). 特別な次元の分布定理——なぜ単一の「魔法の次元」が存在しないのか [論文64]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21616221
10. 山岸勇輝 (2026). 次元センサス——なぜ **3+1** 次元か、独立な根による「過剰決定」として [論文69]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21650011
11. 山岸勇輝 (2026). $4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである [論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576
12. 山岸勇輝 (2026). 「次元の呪い」は一つの呪いではない [論文182]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22104170
13. 山岸勇輝 (2026). どこを触っても平らで、それでも合計は **4** π である [論文224]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120836
14. 山岸勇輝 (2026). 鎖の指数を変えたのは「自分を避ける」ことだけであり、四次元より上ではその代価が消える [論文279]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22170222
15. 山岸勇輝 (2026). 三百本目の点呼——同根か別根かは、判定できる [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)