

同じ整数を、三つの別の数え方が返す

— 曲率を積む・ベクトル場の零点を数える・関数の峠を数える — トーラスの高さ関数は臨界点を
四つ要し、三つにはできない — [論文316]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

論文67 は $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ をポアンカレ=ホップとして読んだ。本稿が問うのは、 χ を数える道が何本あるかである——答は、三本あり、どれも他の二本から出ないである。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、三つの数え方が同じ整数を返す。曲率の積分・ベクトル場の零点・関数の臨界点（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。トーラスの高さ関数は臨界点を四つ要し、三つにはできない（第3節）。第三に、曲率の積分は大きさを見ない。球の半径を **1** にしても **6371 km** にしても、積分は **12.566371** である（第4節）。第四に、トーラスでは正と負が厳密に打ち消す。数値積分で -1×10^{-13} 未満、すなわち零（第4節）。第五に、要るものが三つとも違う。計量・ベクトル場・関数（第5節）。第六に、分離子は「何を余分に持ち込むか」である。 χ 自身はそのどれも要らない（第6節）。

本稿の射程（射程注記）：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ガウス＝ボンネの定理、ポアンカレ＝ホップの定理、モース理論とモースの不等式、毛玉の定理は、いずれも標準的である。位相幾何学を作らない——使うのは一つの数値積分と、一つの臨界点の勘定だけである。三つの定理を証明しない——どれの証明にも立ち入らない。同じ値を返すことを数で確かめ、要るものが違うことを並べる。高次元を扱わない——閉曲面（二次元）だけを見る。ガウス＝ボンネ＝シャーンの一般化には立ち入らない。ホモロジーを構成しない——ベッチ数は引くだけであり、モースの不等式の証明にも立ち入らない。特異点を扱わない——退化した臨界点や、境界のある曲面は扱わない。既刊との関係：論文67は $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ をポアンカレ＝ホップとして読んだ——本稿はその隣にある三本目（モース）を置き、三本を並べる。論文128は $4\pi = 2\pi\chi$ が三次元だけで成り立つと示した——本稿は次元を動かさず、数え方だけを動かす。論文224は「どこを触っても平らで、それでも合計は 4π 」と書いた——本稿の第4節はその打ち消しをトーラスで数値に出す。論文91は曲率が内在的だと示した——ガウス＝ボンネが計量を要ることの裏側である。論文300は同根か別根かは判定できると示した——本稿はその基準を三本に当てる。論文236は同じ「 $= 0$ 」が五つの別の集まりを返すと示した——本稿は同じ整数を三つの別の勘定が返すという、向きの逆の話である。加えたのは三つの数え方を四つの曲面で表にしたこと、トーラスの曲率積分を自前で数値積分して零を確かめたこと、球の半径を動かして積分が動かないことを示したこと、三つが要求する対象を並べて別根と判定したことである。

1. 記法と問い

設定：向き付け可能な閉曲面を考える。種数 g （穴の数）に対し、オイラー標数は $\chi = 2 - 2g$ である。

観察 1.1

論文67は $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ をポアンカレ＝ホップとして読み、論文128は $4\pi = 2\pi\chi$ が三次元だけで成り立つと示した。

問い：では、 χ を数える道は何本あるのか。

観察 1.2

答は三本である——そしてどの一本も、他の二本から代入では出ない。

2. 三つの数え方が、同じ整数を返す

検算 2.1：四つの曲面で並べる。

曲面	モース（最小-鞍+最大）	ポアンカレ=ホップ	ガウス=ボンネ $\oint K dA$
球面	$1 - 0 + 1 = +2$	+2	$+12.566371 = 2\pi \cdot 2$
トーラス	$1 - 2 + 1 = 0$	0	$0 = 2\pi \cdot 0$
種数 2	$1 - 4 + 1 = -2$	-2	$-12.566371 = 2\pi \cdot (-2)$
種数 3	$1 - 6 + 1 = -4$	-4	$-25.132741 = 2\pi \cdot (-4)$

観察 2.2

三列とも一致する。片方は連続量の積分、他の二つは離散的な勘定である——積分が整数を返すこと自体が、まず異様である。

観察 2.3

論文236 は同じ「= 0」が五つの別の集まりを返すと書いた。本稿は向きが逆である——三つの別の勘定が、同じ一つの整数を返す。

3. 芯：トーラスの臨界点は、三つにはできない

設定：トーラスを立てて、高さを関数に取る。臨界点は「そこで接平面が水平になる点」である。

検算 3.1：

臨界点	個数	指数
最小（底）	1	0
鞍（内側の上下）	2	1
最大（天）	1	2
交代和	—	$1 - 2 + 1 = 0$

観察 3.2

これが本稿の芯である。四つより少なくはできない——モースの不等式が、臨界点の個数をベッチ数の総和で下から押さえるからである。

検算 3.3：

曲面	ベッチ数 b_0, b_1, b_2	臨界点の下限 $\sum b_i$
球面	1, 0, 1	2
トーラス	1, 2, 1	4
種数 2	1, 4, 1	6
種数 g	1, $2g$, 1	$2 + 2g$

観察 3.4

どう関数を選んでも、トーラスでは三つにできない。置き方を変えても、傾けても、滑らかに変形しても——四つは要る——これは関数の性質ではなく、曲面の性質である。

観察 3.5

交代和と総和は別の量である。交代和は $\chi = 0$ 、総和の下限は 4—— χ が零でも、臨界点が消えるわけではない。打ち消しているのであって、無いのではない。

観察 3.6

論文227 は「同じ $\leq$ が触れる壁と触れない壁を指す」と書いた。モースの不等式は触れる壁である—— $2 + 2g$ は実際に達成できる（適切な高さ関数で）。

4. 曲率の積分は、大きさを見ない

検算 4.1：半径 R の球面では $K = 1/R^2$ が至るところ一定、面積は $4\pi R^2$ 。

R [km]	K [/km ²]	面積 [km ²]	$\oint K dA$
1	1.000000	12.566371	12.566371
2	0.250000	50.265482	12.566371
6371	2.463683×10^{-8}	5.100645×10^8	12.566371

観察 4.2

半径が約分されて消える。地球でもビー玉でも $12.566371 = 4\pi$ ——積分は大きさを見ていない。

検算 4.3：トーラス（管の半径 $r = 1$ 、輪の半径 $R = 3$ ）で数値積分する。 $K = \cos u / \{r(R + r \cos u)\}$ 、面積要素は $r(R + r \cos u) du dv$ 。

量	値
分割数	4000
$\oint K dA$ （本稿で計算）	-1.0×10^{-13} 未満
理論値 $2\pi\chi$ ($\chi = 0$)	0

観察 4.4

面積要素の $r(R + r \cos u)$ が、曲率の分母とそのまま約分する。残るのは $\cos u$ の一周積分だけで、これが厳密に零になる——外側の正の曲率と内側の負の曲率が、面積で重みをつけたうえで打ち消す。

観察 4.5

論文224 は「どこを触っても平らで、それでも合計は 4π である」と書いた。トーラスはその逆側である——どこも平らでないのに、合計が零になる。

観察 4.6

R と r を動かしても零のままである。ドーナツを太らせても細らせても変わらない——形を動かして動かない量だから、位相の量なのである。

5. 要るものが、三つとも違う

検算 5.1 :

数え方	持ち込むもの	無ければ
ガウス＝ボンネ	計量（長さの測り方）	曲率が定義できない
ポアンカレ＝ホップ	ベクトル場（零点が孤立）	零点が数えられない
モース	関数（臨界点が非退化）	指数が定まらない

観察 5.2

三つとも、曲面そのものには無いものを持ち込んでいる。計量もベクトル場も関数も、後から乗せる道具である——それなのに答は乗せ方に依らない。

観察 5.3

これが χ が位相不変量であることの、三通りの現れ方である。道具を変えても答が変わらない——論文 91 が「曲率は内在的である」と書いたのと同じ構造の、一段外側。

観察 5.4

毛玉の定理は、この三本目から出る。

曲面	χ	零点の無いベクトル場は
球面	+2	存在しない
トーラス	0	存在する
種数 2	-2	存在しない

観察 5.5

梳かせるのはトーラスだけである。理由は形ではなく整数である—— $\chi \neq 0$ なら、どんなベクトル場も必ずどこかで零になる。球が梳かせないのは、丸いからではない。

6. 分離子：何を余分に持ち込むか

観察 6.1

分離子——数えるために何を余分に持ち込むか。 χ 自身は、そのどれも要らない——三角形分割の頂点・辺・面を数えれば出る。

検算 6.2：論文300 の判定基準を三本に当ててる。

基準	結果
恒等性を保つ対応があるか	いいえ。曲率から零点を作る構成は無い
同じ量が入っているか	いいえ。計量・ベクトル場・関数
一方から他方が出るか	いいえ。代入では移れない
値は一致するか	はい。つねに χ

観察 6.3

三つ「いいえ」、一つ「はい」である。機構は別根で、値だけが同じ——論文300 が「同じ数が現れることは、同じ根を持つことではない」と書いたとおりである。

観察 6.4

では、なぜ一致するのか。三つとも同じ位相不変量を別の道具で読み出しているからで、道具どうしが似ているからではない——一致の理由は下であって、横にはない。

観察 6.5

正直に書くべき点——本稿は「三本しかない」とは言っていない。高次元には指数定理という、この三本を含む枠がある——閉曲面という狭い場所で、三本を数えただけである。

観察 6.6

最後に一つ—— χ が零であることと、何も無いことは別である。トーラスの臨界点は四つ在り、曲率も至るところ零でない——零なのは合計だけである。打ち消しを不在と読み間違えないことが、ここでの規律である。

7. 点呼と結び

1. 三列が一致する（検算2.1）：積分が整数を返す。
2. トーラスは $1 - 2 + 1 = 0$ （検算3.1）：臨界点は四つ。
3. 三つにはできない（観察3.4）：下限は $2 + 2g$ 。
4. 交代和と総和は別（観察3.5）： $\chi = 0$ でも四つ在る。
5. 半径が消える（検算4.1）：どの R でも **12.566371**。
6. トーラスは厳密に零（検算4.3）： 10^{-13} 未満。
7. R と r を動かしても零（観察4.6）：だから位相の量。
8. 要るものが三つとも違う（検算5.1）：計量・場・関数。
9. 梳かせるのはトーラスだけ（観察5.5）：理由は整数である。
10. 三「いいえ」一「はい」（検算6.2）：機構は別根、値だけ同じ。

結び：論文67は $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ をポアンカレ=ホップとして読んだ。 χ を数える道は三本ある——曲率を積む・ベクトル場の零点を数える・関数の臨界点を数える。四つの曲面で三列とも一致し、片方は連続量の積分なのに整数を返す。そしてトーラスの高さ関数は臨界点を四つ要し、三つにはできない——モースの不等式が下限をベッチ数の総和 $2 + 2g$ で押さえるからで、置き方を変えても傾けても変わらない。これは関数の性質

ではなく曲面の性質である。曲率の積分は大きさを見ない——半径 1 でも **6371 km** でも **12.566371** であり、 R が約分されて消える。トーラスでは正と負が厳密に打ち消し、数値積分は 10^{-13} 未満に落ちた—— R を太らせても細らせても零のままで、形を動かして動かないから位相の量なのである。分けるものは一つ——数えるために何を余分に持ち込むか。ガウス＝ボンネは計量を、ポアンカレ＝ホップはベクトル場を、モースは関数を要る——三つとも曲面そのものには無いものであり、それなのに答は乗せ方に依らない。論文300の基準では三つ「いいえ」一つ「はい」で、機構は別根、値だけが同じ——一致の理由は下にある、横にはない。最後に一つ—— χ が零であることと、何も無いことは別である。トーラスの臨界点は四つ在り、曲率も至るところ零ではない。零なのは合計だけであり、打ち消しを不在と読み違えてはいけない。

参考文献

1. Milnor, J. (1963). *Morse Theory*. Princeton: Princeton University Press.
 2. Hopf, H. (1927). Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 96(1).
 3. Poincare, H. (1885). Sur les courbes definies par les equations differentielles. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 4(1).
 4. do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
 5. Bott, R. (1988). Morse Theory Indomitable. *Publications Mathematiques de l'IHES*, 68.
 6. 山岸勇輝 (2026). 4π パッチのオイラー標数的起源—— $m = 4\pi = 2\pi\chi(S^2)$ というポアンカレ＝ホップの読み [論文67]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21642170
 7. 山岸勇輝 (2026). 曲率は内在的である——リーマンと、体系のいくつかの「曲率」を混同しないための言語 [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
 8. 山岸勇輝 (2026). $4\pi = 2\pi\chi$ が成り立つのは、三次元だけである [論文128]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22079576
 9. 山岸勇輝 (2026). どこを触っても平らで、それでも合計は 4π である [論文224]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22120836
 10. 山岸勇輝 (2026). 同じ「 $\leq$ 」が、触れる壁と触れない壁を指している [論文227]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22123129
 11. 山岸勇輝 (2026). 同じ「 $= 0$ 」でも、解の集まりは五つの別の種類のものである [論文236]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22129043
 12. 山岸勇輝 (2026). 三百本目の点呼——同根か別根かは、判定できる [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
-

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)