

ウィグナー角は面積である

— 速度空間は双曲的である：ポアンカレの幾何が特殊相対論の中で働くところ — [論文33]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年8月

— From thinking to syncing. —

要旨

「相対論では速度が普通には足せない」という言い方は、事態を小さく見せすぎている。本稿は、足せない理由が速度空間の曲率であることを数で示す。新しい物理法則は主張しない——ローレンツ変換に反する主張は一つもない。第一に、一直線上ならラピディティは厳密に足せる。 0.5 と 0.5 の合成は 0.8 、 0.8 と 0.6 は 0.9459459459459459 、 0.99 と 0.99 は 0.9999494975001263 で、アインシュタインの合成則と $\tanh(\theta_1 + \theta_2)$ は 10^{-41} の桁で一致する（本稿で計算）（第2節）。第二に、一直線でなければ回転が残る。 $\theta_1 = 1.0$ 、 $\theta_2 = 0.9$ を角 α で合成すると、結果は純粋なブーストではなくブースト $\times$ 回転になる（第3節）。第三に、これが本稿の芯である。その回転角は、ラピディティ三角形の面積である。 α を 15° から 170° まで動かし、ウィグナー角と双曲三角形の角欠損が 10^{-40} の桁で一致することを確認した（本稿で計算）。ガウス＝ボンネが、地表に続いて速度空間でも働いている（第4節）。第四に、分離子は非共線性である。 $\alpha = 0$ では三角形が線分に潰れ、面積も回転もちょうど 0 になる。 $\alpha = 0.001^\circ$ で $5.69524130474 \times 10^{-6}$ 、 1° で 0.005695078292 （第5節）。第五に、ブレーキ。「足し方が違う」では足りない。速度の合成は可換でも結合的でもない： $u = (0.8, 0)$ 、 $v = (0, 0.6)$ に対し $u \oplus v = (0.8, 0.36)$ 、 $v \oplus u = (0.64, 0.6)$ で速さは一致し向きが違う。結合則の破れは 0.0600488 である（本稿で計算）（第6節）。第六に、低速極限の $1/2$ は調整ではなく、面積の主要項である（第7節）。

本稿の射程：新しい物理法則は主張しない——ローレンツ変換に反する主張は一つもない。速度空間の双曲性、ラピディティ、トーマス＝ウィグナー回転、ジャイロ群はいずれも標準的である。加えたのはウィグナー角と双曲面積の一致を自前で数値検証したこと、分離子を非共線性と書いたこと、三つの「足し算」に住所を書いたこと、同じガウス＝ボンネが体系の中で二度目に働くことと指摘したことである。

1. 記法と位置づけ

$c = 1$ とし、速度 v に対しラピディティを $\theta = \text{artanh } v$ で定める。速度空間とは、単位双曲面 $\{u : u \cdot u = 1, u^0 > 0\}$ に誘導された計量を入れたものをいい、その曲率は -1 (c を戻せば $-1/c^2$) である。

位置づけ：論文108 は相対論の三つの幾何を別根として分けた。論文91 は内在的曲率を扱った。本稿はその二つの交点に立つ——速度の集合そのものが、曲率を持った空間なのである。また、地表についてガウス＝ボンネを使った議論（論文27）と、同じ定理がここで二度目に働く。

2. 一直線上なら、ラピディティは厳密に足せる

検算 2.1

v_1	v_2	アインシュタイン合成	$\tanh(\theta_1 + \theta_2)$	差
0.5	0.5	0.8	0.8	0.0
0.8	0.6	0.9459459459459459	0.9459459459459459	1.148×10^{-41}
0.99	0.99	0.9999494975001263	0.9999494975001263	0.0
0.1	0.2	0.2941176470588235	0.2941176470588235	5.74×10^{-42}

(証明終)

観察 2.2

一直線上では、ラピディティが加法的な座標であり、速度はそうでない。ラピディティとは、静止点からの双曲的距離のことである——測地線に沿って長さを足しているのだから、足せて当たり前である。

3. 一直線でなければ、回転が残る

検算 3.1： $\theta_1 = 1.0$ を x 方向に、 $\theta_2 = 0.9$ を角 α の方向に合成する。

α	合成ラピディティ	ウィグナー角 ω
0°	1.9	0.0
30°	1.849219714502761	0.1664176186094826
60°	1.694782265369292	0.3053032447581819
90°	1.431199273508851	0.3851025270775771
120°	1.053494636278679	0.3698915743144614
150°	0.5695508468232462	0.2335068067413657

（証明終）

観察 3.2

二つのブーストは、ブーストに合成されない。残るのは回転である。

4. 芯：その回転角は、三角形の面積である

単位双曲面上に三点を取る： O （静止）、 P_1 （第一のブーストの後）、 P_2 （両方の後）。三辺の長さはそれぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ である。曲率 -1 の面ではガウス＝ボンネにより面積 $= \pi - (\text{三つの内角の和})$ である。

検算 4.1

α	ウィグナー角	双曲三角形の面積	差
15°	0.0848772541736125232	0.0848772541736125232	2.612×10^{-40}
30°	0.166417618609482628	0.166417618609482628	1.894×10^{-40}
45°	0.241142741675334008	0.241142741675334008	2.009×10^{-40}
60°	0.30530324475818192	0.30530324475818192	6.888×10^{-41}
90°	0.38510252707757708	0.38510252707757708	5.166×10^{-41}
120°	0.369891574314461439	0.369891574314461439	2.87×10^{-41}
150°	0.233506806741365669	0.233506806741365669	9.184×10^{-41}
170°	0.0837525550248853798	0.0837525550248853798	1.521×10^{-40}

表全体での最悪差は 2.612×10^{-40} であった。（証明終）

観察 4.2

残った回転は、後から付け足された効果ではない。それは曲がった空間における三角形の角欠損そのものである。

観察 4.3

同じガウス＝ボンネが、体系の中で二度目に働いている（一度目は地表、論文27）。一度目は正の曲率で過剰を、二度目は負の曲率で欠損を与えた。定理は同じで、符号だけが違う。

観察 4.4

したがって「トーマス＝ウィグナー回転」は、相対論に固有の奇妙な現象ではない。曲がった空間で閉じた道を一周したときのホロノミーである——フーコーの振り子が球面で向きを変えるのと、定理としては同じ場所にある。

5. 分離子は非共線性である

検算 5.1

α	ウィグナー角	面積
0°	0.0	0.0
0.001°	$5.69524130474 \times 10^{-6}$	$5.69524130474 \times 10^{-6}$
0.1°	0.000569523967479	0.000569523967479
1°	0.005695078292	0.005695078292
10°	0.0567892433037	0.0567892433037

(証明終)

観察 5.2

$\alpha = 0$ では三角形が線分に潰れる。面積は 0、回転も 0、そしてラピディティはただ足される。角を動かせば曲率が効きはじめる——動かすべきものは非共線性である。

観察 5.3

第2節が「足せる」と言えたのは、速度が特別だったからではない。一次元の部分多様体には面積が無いからである。

6. ブレーキ：可換でも結合的でもない

検算 6.1 : $u = (0.8, 0)$ 、 $v = (0, 0.6)$ 、 $w = (0.4, 0.4)$ とする。

$u \oplus v$	(0.8, 0.36)
$v \oplus u$	(0.64, 0.6)
$ u \oplus v $	0.8772684879784524
$ v \oplus u $	0.8772684879784524
$(u \oplus v) \oplus w$	(0.84891448825875, 0.45414266725742)
$u \oplus (v \oplus w)$	(0.87700534759358, 0.40106951871658)
結合則の破れ	0.0600488

（証明終）

観察 6.2

速さは一致し、向きだけが違う。食い違いはちょうどウィグナー回転である。

観察 6.3

「相対論では速度の足し方が違う」という言い方は、事態を小さく見せすぎている。速度の集合は、この演算のもとで群ですらない。正しくは、群でないものを群のように書こうとしたから破れが出た、というべきである。

7. 低速極限の 1/2

検算 7.1： $\alpha = 90^\circ$ 、二つの速度をともに v とする。

v	ウィグナー角	$\frac{1}{2}v^2$	比
0.1	0.0050251467773656	0.005	1.00502935547
0.01	$5.0002500145843 \times 10^{-5}$	5.0×10^{-5}	1.00005000292
0.001	$5.0000025000015 \times 10^{-7}$	5.0×10^{-7}	1.0000005
0.0001	$5.000000025 \times 10^{-9}$	5.0×10^{-9}	1.000000005

(証明終)

観察 7.2

比は 1 に収束する。主要項が担う $1/2$ は、スピン軌道相互作用に現れるあの $1/2$ と同じものである。それは辻褃合わせの係数ではなく、面積の主要項である——三角形の面積が二辺の積の半分から始まるのと同じ理由による。

8. 点呼

観察 8.1

「足し算」	空間	曲率	演算の性質
ガリレイの速度	ユークリッド	0	可換群
ラビディティ	双曲空間の測地線の長さ	-1	一直線上でのみ加法的
相対論的速度	同じ双曲空間の点	-1	可換でも結合的でもない

観察 8.2

三つとも「速度を足す」と呼ばれてきた。分離子は、その集合が載っている空間の曲率である。

9. 結論

1. 一直線上ならラピディティは厳密に足せる（検算2.1）。差は 10^{-41} の桁。
2. 一直線でなければ回転が残る（検算3.1）。
3. その回転角は三角形の面積である（検算4.1）。最悪差 2.612×10^{-40} 。
4. 分離子は非共線性である（検算5.1）。 $\alpha = 0$ でちょうど 0。
5. 速度の合成は可換でも結合的でもない（検算6.1）。破れは 0.0600488。
6. 低速極限の $1/2$ は面積の主要項である（検算7.1）。

結び：速度が素直に足せないのは、規則が変だからではない。速度の住んでいる場所が、曲がっているからである。そして曲がった場所では、三角形を一周すると向きが変わる——地表でも、速度空間でも、同じ定理が同じことを言っている。

参考文献

1. Poincaré, H. (1906). *Sur la dynamique de l'électron*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 21.
2. Varičák, V. (1910). *Anwendung der Lobatschefskijschen Geometrie in der Relativtheorie*. Physikalische Zeitschrift, 11.
3. Thomas, L. H. (1926). *The motion of the spinning electron*. Nature, 117.
4. Wigner, E. P. (1939). *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*. Annals of Mathematics, 40(1).
5. Aravind, P. K. (1997). *The Wigner angle as an anholonomy in rapidity space*. American Journal of Physics, 65(7).
6. Ungar, A. A. (1988). *Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group*. Foundations of Physics Letters, 1(1).
7. 山岸勇輝 (2026). なぜ「最高速度」が存在するのか [論文83]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21741190
8. 山岸勇輝 (2026). 内在的曲率 [論文91]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758406
9. 山岸勇輝 (2026). ミンコフスキーの不変量 [論文108]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21837313
10. 山岸勇輝 (2026). 光は共形構造までしか決めない [論文111]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21961685
11. 山岸勇輝 (2026). 世界線であって、時計の遅れではない [論文123]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22055231

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)