

強度は材料の定数ではなく、体積の関数である

— 体積を 1000 倍にすると、ばらつき $m = 2$ の材料は強度が **0.0316** 倍に落ちる — 強度を半分にする体積倍率はちょうど 2^m で、 $m = 2$ なら 4 倍、 $m = 20$ なら **1048576** 倍 — [論文344]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

材料の強度は、便覧に一つの数として載っている。本稿が問うのは、その数は何の数かである——答は、試験片の体積を書かなければ意味を持たない数である。新しい数学定理も新しい法則も主張しない。第一に、強度は $\sigma \propto V^{-1/m}$ に従い、 $m = 2$ なら体積 1000 倍で **0.0316** 倍になる（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。効いているのは平均強度ではなく、ばらつき m だけである（第3節）。第三に、強度を半分にする体積倍率はちょうど 2^m である（第3節）。第四に、 $m = 2$ なら 4 倍、 $m = 10$ なら 1024 倍、 $m = 20$ なら **1048576** 倍である（第3節）。第五に、モンテカルロで裏を取った。リンク 1000 本の最小値は実測 **0.027956**、理論 **0.028025**（第4節）。第六に、分離子は「平均が効くか、最悪が効くか」である（第5節）。

本稿の射程（射程注記）：新しい数学定理も新しい法則も主張しない——ワイブル分布、最弱リンク模型、寸法効果 $\sigma \propto V^{-1/m}$ はいずれも標準的である。破壊力学を作らない——欠陥の分布の物理、き裂の発生と進展には立ち入らない。触れるにとどめる。 m を予言しない——ワイブル係数は測るものであって、本稿は与えられた m に対して何が起きるかだけを見る。延性材料を扱わない——降伏して応力を再分配する材料では最弱リンクが成り立たない。脆性材料（セラミクス、ガラス、繊維）を想定する。応力分布を扱わない——一様応力を仮定する。曲げなど不均一な場では有効体積の補正が要る。疲労を扱わない——繰り返し荷重下の寸法効果は主題にしない。

既刊との関係：論文343 は応力集中に穴の大きさが入っていないと示した——そこでは大きさが効かず、ここでは大きさがすべてを決める。同じ「材料の破壊」の中で、大きさが入る量と入らない量が並んでいる。論文342 は同じ二材料が向きだけで 16.93 倍ちがうと示した——そこでは剛性が、ここでは強度が、材料の定数でなかった。「材料の定数」と呼ばれるものが二度とも定数でない。論文334 は足すのが値ではなく精度だと示した——そこでは n を増やすと良くなり、ここでは増やすと悪くなる。平均を取るか、最小を取るかの差である。論文300 は同根か別根かは判定できると示した——平均の $1/\sqrt{n}$ と最小の $n^{-1/m}$ は、判定に掛ければ別根である。加えたのは強度を半分にする体積倍率が 2^m という閉じた式になることを示したこと、モンテカルロ二万試行で理論値と突き合わせたこと、 $m \rightarrow \infty$ で寸法効果が消えることを反例として確かめたこと、分離子を「平均か最悪か」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：脆性材料は、内部の最も弱い欠陥から壊れる。体積 V の試験片を、体積 v の小片が $N = V/v$ 個つながった鎖と見なす——全体の強度は、 N 個のうち最小の強度で決まる。

観察 1.1

これが最弱リンク模型である。鎖は最も弱い輪で切れる——そして輪の数が増えれば、最も弱い輪はより弱くなる。

観察 1.2

各小片の強度がワイブル分布に従うとき、寸法効果は閉じた形になる。生存確率 $\exp(-V(\sigma/\sigma_0)^m)$ から

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1/m}$$

が出る—— m はワイブル係数と呼ばれ、ばらつきの小ささを表す。

観察 1.3

本稿の測り方を先に固定する。一様応力、同じ欠陥分布、脆性破壊を仮定する——降伏して応力を再分配する材料では、このモデルは成り立たない。

問い：同じ材料の「強度」は、試験片の大きさでどれだけ動くのか。

2. $m = 2$ なら、体積 1000 倍で強度が 0.0316 倍になる

検算 2.1：ばらつき m と体積倍率ごとに、強度の比を出す（本稿で計算）。

m	体積 10 倍	体積 100 倍	体積 1000 倍
2	0.3162	0.1000	0.0316
5	0.6310	0.3981	0.2512
10	0.7943	0.6310	0.5012
20	0.8913	0.7943	0.7079
50	0.9550	0.9120	0.8710

観察 2.2

$m = 2$ の材料は、体積を 1000 倍にすると強度が 31.6228 分の 1 になる。同じ材料である——組成も、製法も、欠陥の作られ方も同じで、大きさだけが違う。

観察 2.3

$m = 50$ なら、同じ 1000 倍で 0.8710 にしか落ちない。13 パーセントの低下である——同じ体積の変化に対して、 m が 2 か 50 かで、27.5423 倍ちがう応答をする。

観察 2.4

したがって「この材料の強度は σ MPa」という書き方は不完全である。どの大きさの試験片で測ったかを書かねばならない——数字だけでは、実物の部品に外挿できない。

観察 2.5

そして実物のほうが、たいてい試験片より大きい。だから外挿は常に弱くなる向きに効く——試験片で測った強度をそのまま使うと、必ず危険側に外れる。

3. 芯：効いているのは平均強度ではなく、ばらつきだけである

観察 3.1

これが本稿の芯である。式 $\sigma_2/\sigma_1 = (V_1/V_2)^{1/m}$ に、平均強度 σ_0 が現れない——どれだけ強い材料でも、寸法効果の大きさは m だけで決まる。

検算 3.2：強度を半分にするのに要る体積倍率を求める（本稿で計算）。 $(1/2) = k^{-1/m}$ を k について解くと $k = 2^m$ である。

m	強度を半分にする体積倍率 2^m
2	4
5	32
10	1024
20	1048576

観察 3.3

$m = 2$ の材料は、体積をたった 4 倍にするだけで強度が半分になる。 $m = 20$ なら 1048576 倍が要る—— m が 10 倍になると、必要な体積倍率は 262144 倍になる。

観察 3.4

2^m という閉じた式が、 m の意味を言い切っている。 m は「強度が半分になるまでに何桁の体積を要するか」を、2 を底として測っている——ばらつきが小さいとは、大きくしても弱くなりにくい、ということである。

観察 3.5

$m \rightarrow \infty$ で寸法効果は消える。 $m = 1000$ なら体積 1000 倍でも 0.993116 で、0.7 パーセントしか落ちない——ばらつきがゼロの材料でだけ、強度は本当に材料の定数になる。そういう材料は存在しない。

観察 3.6

だから「強度が材料の定数である」という言い方は、 $m = \infty$ の近似である。金属で通用するのは m が大きいからで、セラミクスやガラスで通用しないのは m が小さいからである——どちらも同じ式の中にいる。

4. モンテカルロで裏を取る

設定：第2節と第3節は式から出した。式が正しく最弱リンクを表しているかを、乱数で確かめる。

検算 4.1：ワイブル分布 ($m = 2$ 、尺度 1) から n 個引いて最小値を取り、二万回繰り返して平均する（本稿で計算）。

リンク数 n	最小値の平均（実測）	理論 $n^{-1/m}\Gamma(1 + 1/m)$	比
1	0.887887	0.886227	1.0019
10	0.280688	0.280250	1.0016
100	0.088394	0.088623	0.9974
1000	0.027956	0.028025	0.9975

観察 4.2

四つの n すべてで、0.3 パーセント以内で一致した。式から出した値と、乱数を回して得た値が——最弱リンクの絵が、実際にこの寸法効果を作っている。

観察 4.3

$n = 1$ の理論値 0.886227 は $\Gamma(1.5)$ である。尺度 1、 $m = 2$ のワイブル分布の平均そのもの——独立に知られた値と一致するので、乱数の側も式の側も正しく組めている。

観察 4.4

n を 1 から 1000 にすると、最小値は 0.887887 から 0.027956 に落ちる。31.76 分の 1 である——第2節の 0.0316 倍と、独立な方法で同じ数に着いた。

観察 4.5

正直に書くべき点——このモデルは、欠陥が独立に分布していることを前提にしている。欠陥が集まっていたり、表面に偏っていたりすれば、有効体積は幾何的な体積と一致しない——実務では体積ではなく「有効体積」を使う。

5. 分離子：平均が効くか、最悪が効くか

観察 5.1

分離子——たくさん集めたときに効くのが、平均なのか、最悪なのか。

集めたときの量		n が増えると	例
平均	$\sigma/\sqrt{n}$	良くなる	センサの融合（論文334）
最悪	$n^{-1/m}$	悪くなる	脆性材料の強度

観察 5.2

同じ「 n 個集める」が、逆向きに効いている。論文334 では n 台のセンサを融合すると精度が上がった——ここでは n 個の小片を繋ぐと強度が下がる。取り出しているのが平均か最小かで、向きが逆になる。

観察 5.3

そして落ち方の速さも別である。平均は $n^{-1/2}$ で、最悪は $n^{-1/m}$ である—— $m = 2$ のときだけ、たまたま同じ $n^{-1/2}$ になる。数が一致しても根は別で、論文300 の基準に当てれば別根である。

観察 5.4

分離子は動かせる。延性材料は降伏して応力を再分配するので、最も弱い点が壊れても全体が壊れない——最弱リンクではなくなり、寸法効果が小さくなる。同じ幾何でも、材料が塑性を持つかどうかで模様が替わる。

観察 5.5

論文343 との対をなす。343 は応力集中に穴の大きさが入っていないと書いた——本稿では強度に体積が入る。同じ「材料が壊れる」話の中で、大きさが効かない量と、大きさだけが効く量が並んでいる。どちらの量で考えているかを言わないと、話が噛み合わない。

観察 5.6

最後に一つ——便覧の強度は、試験片の大きさに測った値である。実物はたいていそれより大きい——だからその数は、実物については必ず楽観的な側に外れている。どれだけ外れているかは、 m を測らなければ分からない。

6. 点呼と結び

1. $m = 2$ 、体積 1000 倍で 0.0316 倍（検算2.1）：31.6228 分の 1。
2. $m = 50$ なら同じ 1000 倍で 0.8710（観察2.3）： m で応答が 27.5423 倍ちがう。

3. 式に平均強度が現れない（観察3.1）： m だけで決まる。
4. 強度を半分にする体積倍率は 2^m （検算3.2）：閉じた式。
5. $m = 2$ なら4倍、 $m = 20$ なら1048576倍（検算3.2）： m の意味そのもの。
6. $m = 1000$ なら0.993116（観察3.5）：寸法効果が消える。
7. モンテカルロが0.3パーセント以内で一致（検算4.1）：二万試行。
8. $n = 1$ の理論値は $\Gamma(1.5) = 0.886227$ （観察4.3）：独立に知られた値。
9. 独立な二方法が同じ0.0316に着く（観察4.4）：式と乱数。
10. 論文334とは向きが逆（観察5.2）：平均か最小か。

結び：脆性材料は最も弱い欠陥から壊れるので、体積 V の試験片は $N = V/v$ 個の小片の鎖であり、全体の強度は最小の強度で決まる——そして輪の数が増えれば、最も弱い輪はより弱くなる。寸法効果は閉じた形で書ける—— $\sigma_2/\sigma_1 = (V_1/V_2)^{1/m}$ である。 $m = 2$ の材料は体積を1000倍にすると強度が0.0316倍、31.6228分の1になる。同じ材料、同じ組成、同じ製法で、大きさだけが違う。 $m = 50$ なら同じ1000倍で0.8710にしか落ちず、 m が2か50かで応答が27.5423倍ちがう。そして式に平均強度が現れない——どれだけ強い材料でも、寸法効果の大きさはばらつき m だけで決まる。強度を半分にするのに要る体積倍率を解くと、ちょうど 2^m になる—— $m = 2$ なら4倍、 $m = 10$ なら1024倍、 $m = 20$ なら1048576倍である。この閉じた式が m の意味を言い切っている： m は「強度が半分になるまでに何桁の体積を要するか」を2を底として測っている。 $m \rightarrow \infty$ で寸法効果は消える—— $m = 1000$ なら体積1000倍でも0.993116で0.7パーセントしか落ちない。つまり「強度が材料の定数である」という言い方は、 $m = \infty$ の近似である。金属で通用するのは m が大きいから、セラミクスやガラスで通用しないのは m が小さいからで、どちらも同じ式の中にいる。乱数でも裏を取った——ワイブル分布から n 個引いて最小値を取り、二万回繰り返す。 $n = 1000$ で実測0.027956、理論0.028025、四つの n すべてで0.3パーセント以内。 $n = 1$ の理論値0.886227は $\Gamma(1.5)$ そのもので、独立に知られた値と一致する。式と乱数という独立な二方法が、同じ0.0316倍に着いた。分けるものは一つ——たくさん集めたときに効くのが、平均なのか、最悪なのか。論文334では n 台のセンサを融合すると精度が上がり、ここでは n 個の小片を繋ぐと強度が下がる——同じ「 n 個集める」が逆向きに効いている。落ち方も別で、平均は $n^{-1/2}$ 、最悪は $n^{-1/m}$ である—— $m = 2$ のときだけたまたま同じ形になるが、論文300の基準に当てれば別根である。正直に書いておく——このモデルは欠陥が独立に分布していることを前提にしており、欠陥が集まっていたり表面に偏っていれば有効体積は幾何的な体積と一致しない。延性材料は降伏して応力を再分配するので最弱リンクではなくなり、寸法効果は小さくなる。最後に一つ——便覧の強度は、試験片の大きさを測った値である。実物はたいていそれより大きい。だからその数は、実物については必ず楽観的な側に外れている。どれだけ外れているかは、 m を測らなければ分からない。

参考文献

1. Weibull, W. (1939). A Statistical Theory of the Strength of Materials. *Ingeniörsvetenskapsakademiens Handlingar*, 151.

2. Weibull, W. (1951). A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18.
3. Griffith, A. A. (1921). The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 221.
4. Bazant, Z. P. (2004). Scaling Theory for Quasibrittle Structural Failure. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(37).
5. Danzer, R., Lube, T., Supancic, P., Damani, R. (2008). Fracture of Ceramics. *Advanced Engineering Materials*, 10(4).
6. 山岸勇輝 (2026). 三百本目の点呼 — 同根か別根かは、判定できる [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
7. 山岸勇輝 (2026). 足しているのは値ではなく、精度である [論文334]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22681804
8. 山岸勇輝 (2026). 同じ二材料を同じ割合で混ぜて、剛性が 16.93 倍ひらく [論文342]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22682160
9. 山岸勇輝 (2026). 穴の大きさは、応力集中の式に入っていない [論文343]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22682218

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)