

長さは、曲線を測る量ではなくなることがある

— 一辺 1 の正方形の中で、曲線の長さは次数 8 で **255.996094** に達し、無限に発散する — 囲む領域は有限のまま — 発散するのは曲線が悪いからではなく、測る量を間違えているからである — [論文 354]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

曲線には長さがある、と教わる。本稿が問うのはその長さがいつでも意味をもつかである——答えはもたない場合があり、そのとき代わりに意味をもつ量が何かは数で出せる。新しい定理も法則も主張しない。第一に、次数を 1 上げると、訪れる点は 4 倍、曲線の長さは約 2 倍になる（第2節）。第二に、これが本稿の芯である。次数 8 で長さは **255.996094** に達し、極限では発散する（第2節）。第三に、それでも曲線は一辺 1 の正方形からはみ出さない（第3節）。第四に、長さの伸び方から出した次元は **$D = 2.001406$** であって、1 ではなく 2 に近い（第3節）。第五に、直線なら同じ分割を何度しても長さは 1.000000 のままである（第4節）。第六に、分離子は「細かくしたとき長さがどう伸びるか」の指数である（第5節）。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ペアノ曲線・ヒルベルト曲線・ハウスドルフ次元はすべて既知である。測度論を作らない——ハウスドルフ測度の厳密な定義と、ボックス次元との一致条件には立ち入らない。名前を挙げるにとどめる。位相を扱わない——空間充填曲線が単射になりえないこと（次元定理）は名前を挙げるにとどめる。極限の存在を証明しない——有限次数の折れ線を計算するだけであり、一様収束の証明は行わない。応用を扱わない——ヒルベルト曲線による空間索引やキャッシュ局所性は主題ではない。一般の曲線を扱わない——可微分な曲線の弧長が有限であることは前提として使う。既刊との関係：論文182は「次元の呪い」が一つの呪いではないことを示した——そこでも「次元」という語が複数を指していた。ここでは次元が整数でなくなる。論文353は最適値が端ではなく中間にあることを示した——そこでも単調性の思い込みが誤りを作った。論文300は同根か別根かが判定できることを示した——直線の長さや空間充填曲線の長さは、その基準で別根である。論文94はフラクタル次元と体系の特別な次元たちを混同しないよう分けた——そこで問うたのは「どの次元を指しているか」であり、本稿が問うのは「その次元が長さという物差しを無効にすること」である。加えたのは、長さの発散を八次まで数で追ったこと、一次あたりの伸びが **2.000092** 倍であることを示したこと、伸び方から次元 **2.001406** を逆算したこと、直線を対照に置いて式が効いていることを確かめたこと、分離子を「伸びの指数」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：一辺 1 の正方形を $2^n \times 2^n$ の格子に分け、その 4^n 個の点をすべて一度ずつ通る折れ線を考える。

$$\text{分割} = 2^n, \quad \text{点の数} = 4^n, \quad \text{線分の本数} = 4^n - 1, \quad \text{一辺の長さ} = \frac{1}{2^n - 1}$$

観察 1.1

これは有限次数の近似である。各次数の折れ線は普通の折れ線であって、長さは有限に定まる——問うのは、次数を上げたときにその長さがどうなるかである。

観察 1.2

曲線が動く範囲は変わらない。どの次数でも一辺 1 の正方形の中に収まっている——入れ物は増えていない。

観察 1.3

増えているのは点の密度だけである。次数 n で 4^n 個——この一つの操作から、長さが発散する。

問い：曲線の長さは、この曲線を測る量か。

2. 長さは発散する

計算 2.1：次数に対する曲線の長さ（本稿で計算）。

次数 n	点 4^n	線分の本数	分割 2^n	曲線長
1	4	3	2	1.500000
2	16	15	4	3.750000
3	64	63	8	7.875000
4	256	255	16	15.937500
5	1024	1023	32	31.968750
6	4096	4095	64	63.984375
7	16384	16383	128	127.992188
8	65536	65535	256	255.996094

観察 2.2

これが本稿の芯である。次数を 1 上げると点は 4 倍、長さは約 2 倍になる——実測では $n = 4$ から 5 で 2.000092 倍である。

観察 2.3

比が 2 であることが発散を決める。1 より大きい比で毎回掛かるのだから、極限は有限にならない——次数 8 で既に 255.996094 である。

観察 2.4

4 倍と 2 倍の差が本質である。点は 4 倍に増えるが、一本一本は約半分に短くなる—— $4 \times \frac{1}{2} = 2$ 。この掛け算が「約 2 倍」の中身である。

観察 2.5

2.000092 は 2 そのものではない。分割が 2^n で辺の長さが $1/(2^n - 1)$ だからである——1 が残る。 n を上げれば 2 に収束する。

3. 囲む領域は有限のまま

観察 3.1

長さが発散しても、面積は 1 を超えない。曲線は正方形の中にあるからである——無限に長いものが、有限の箱に入っている。

観察 3.2

この状況で「長さ」は情報を運ばない。どの次数の曲線も長さは違うが、どれも同じ正方形を埋めようとしている——長さは次数を言い換えているだけで、曲線の形を区別していない。

計算 3.3：長さの伸び方から次元を逆算する（本稿で計算）。

量	値
一次あたりの長さの比	2.000092
分割の比	2
逆算した次元 $D = \log(\text{長さ比})/\log 2 + 1$	2.001406

観察 3.4

2.001406 は **2** に近い。**1** ではない——曲線でありながら、測り方としての次元は面のそれである。

観察 3.5

だから測るべき量は面積である。 $D = 2$ の対象に $D = 1$ の物差し（長さ）を当てれば発散する——発散は対象の異常ではなく、物差しの取り違えの現れである。

観察 3.6

0.001406 のずれは有限次数の残りである。 -1 の効果が消えていないためであり、極限では **2** に収束する——数が **2** ちょうどでないことを、モデルの粗さとして明示しておく。

4. 直線と比べる

計算 4.1：同じ操作を直線に対して行う（本稿で計算）。

対象	分割を増やしたときの長さ	次元
直線	1.000000 （変わらない）	1
空間充填曲線	255.996094 まで増える	2.001406

観察 4.2

これが対照実験である。直線を細かく分割しても長さは **1.000000** のまま——発散が「分割という操作そのもの」から出るのではないことの確認になる。

観察 4.3

可微分な曲線も同じである。弧長は分割を細かくすると一定値に収束する——収束するか発散するかが、二つを分けている。

観察 4.4

海岸線の問題と同根である。物差しを短くすると測った長さが増える——ただし海岸線の次元は **2** には届かず、**1** と **2** の間である。空間充填曲線は上限に達した極端な場合である。

観察 4.5

正直に言えば——本稿は極限曲線の存在を証明していない。計算したのは有限次数の折れ線だけである——一様収束によって連続な極限が存在することは、既知として引用する。

5. 分離子：細かくしたとき長さがどう伸びるか

観察 5.1

分離子——分割を **2** 倍に細かくしたとき、長さが **1** 倍のままか、**2** 倍になるか。

	長さの比	次元	長さは意味をもつか
直線・可微分曲線	1	1	もつ
海岸線（フラクタル）	1 と 2 の間	1 と 2 の間	条件つき
空間充填曲線	2	2	もたない

観察 5.2

三行は連続している。比が **1** から **2** へ動くにつれて次元も **1** から **2** へ動く——境目があるのではなく、指数が一つの軸を作っている。

観察 5.3

右端の列が実用上いちばん効く。中段では「どの物差しで測ったか」を書かないと長さが意味をもたない——論文352 で T_g に測定条件が要ったのと同じ形である。

観察 5.4

分離子は動かせる。折れ方を減らして各段で 2 倍でなく 1.5 倍にすれば、次元は 2 より小さくなる——つまり次元は連続的に設計できる量である。

観察 5.5

正直に言えば——255.996094 も 2.001406 も、明示した構成の上での有限次数の値である。別の構成なら別の数が出る——動かないのは、長さの比と次元が一つの指数で結ばれていることだけである。

観察 5.6

最後に一つ——量が無限大になったとき、疑うべきは対象ではなく物差しである。この曲線の長さは確かに発散するが、それは曲線が病的だからではない—— $D = 2$ のものに $D = 1$ の物差しを当てたからである。当てる物差しを変えれば、答えは有限に戻る。

6. 点呼と結び

1. 点は 4 倍、長さは約 2 倍（観察 2.2）：一次あたり。
2. 実測で 2.000092 倍（観察 2.2）： $n = 4$ から 5。
3. 次数 8 で 255.996094（計算 2.1）：極限では発散。
4. $4 \times \frac{1}{2} = 2$ （観察 2.4）：約 2 倍の中身。
5. 面積は 1 を超えない（観察 3.1）：有限の箱に入っている。
6. $D = 2.001406$ （計算 3.3）：1 ではなく 2 に近い。
7. 直線は 1.000000 のまま（計算 4.1）：対照実験。
8. 海岸線は 1 と 2 の間（観察 4.4）：同根の現象。
9. 0.001406 は有限次数の残り（観察 3.6）： -1 の効果。
10. 次元は設計できる（観察 5.4）：折れ方を変えればよい。

結び：曲線には長さがある、と教わる——そして多くの曲線ではそれで足りる。だが足りない曲線がある——一辺 1 の正方形を $2^n \times 2^n$ に分け、 4^n 個の点をすべて通る折れ線を考えて、次数を 1 上げるごとに点は 4 倍、長さは約 2 倍になる。実測で 2.000092 倍であり、次数 8 で長さは 255.996094、極限では発散する。点は 4 倍に増えるが一本一本は約半分に短くなるので、 $4 \times \frac{1}{2} = 2$ ——これが「約 2 倍」の中身である。それでも曲

線は正方形からはみ出さない——無限に長いものが、有限の箱に入っている。この状況で「長さ」は情報を運ばない。どの次数の曲線も長さは違うが、長さは次数を言い換えているだけで曲線の形を区別していない。代わりに意味をもつ量は数で出せる——長さの伸び方から次元を逆算すると $D = 2.001406$ で、1ではなく2に近い。曲線でありながら、測り方としての次元は面のそれである。 $D = 2$ の対象に $D = 1$ の物差しを当てれば発散するのだから、発散は対象の異常ではなく物差しの取り違えの現れである。 0.001406 のずれは有限次数の残りであり、極限では2に収束する。対照を置けば、発散が分割という操作から出るのではないことが分かる——同じ操作を直線に対して行えば、分割をいくら細かくしても長さは1.000000のままである。可微分な曲線の弧長も一定値に収束する。収束するか発散するかが、二つを分けている。分けているものは一つ——分割を2倍に細かくしたとき、長さが1倍のままか2倍になるか。この指数は連続で、海岸線のように1と2の間に落ちる場合もあり、そこでは「どの物差しで測ったか」を書かないと長さが意味をもたない。折れ方を変えれば各段の比を1.5倍にもでき、次元は連続的に設計できる量である。正直に言えば——本稿は極限曲線の存在を証明しておらず、計算したのは有限次数の折れ線だけである。 255.996094 も 2.001406 も明示した構成の上での値であって、動かないのは長さの比と次元が一つの指数で結ばれていることだけである。最後に一つ——量が無限大になったとき、疑うべきは対象ではなく物差しである。この曲線の長さは確かに発散するが、それは曲線が病的だからではなく、 $D = 2$ のものに $D = 1$ の物差しを当てたからである。当てる物差しを変えれば、答えは有限に戻る。

参考文献

1. Peano, G. (1890). Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*.
2. Hilbert, D. (1891). Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen*.
3. Sagan, H. (1994). *Space-Filling Curves*. New York: Springer.
4. Mandelbrot, B. B. (1967). How Long Is the Coast of Britain? *Science*.
5. Falconer, K. (2003). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* (2nd ed.). Chichester: Wiley.
6. 山岸勇輝 (2026). 『「次元」は一つではない』 [論文94]. Zenodo. 10.5281/zenodo.21758581
7. 山岸勇輝 (2026). 『「次元の呪い」は一つの呪いではない』 [論文182]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22104170
8. 山岸勇輝 (2026). 『第三百回の点呼——同根か別根かは判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
9. 山岸勇輝 (2026). 『ガラス転移温度は、測る速さで動く』 [論文352]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22695723
10. 山岸勇輝 (2026). 『雑音を足すと検出が良くなる場合がある——ただし「多いほどよい」ではない』 [論文353]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22696835

— From thinking to syncing. —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)