

厳密な式が計算できないとき、途中で切ると上下から挟める

— 包除原理の項は $2^n - 1$ 個で、 $n = 60$ なら一秒に十億項を足しても **36.53** 年かかる — ところが偶数項で切れば必ず上から、奇数項で切れば必ず下から挟み、幅は $1/(k+1)!$ で縮む — 使えるようにするのは、諦めることなく切ることである — [論文360]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

包除原理は厳密な公式である。本稿が問うのは厳密であれば使えるのかである——答えはそのままでは使えないが、切れば使える。新しい定理も法則も主張しない。第一に、項の数は $2^n - 1$ 個であり、 $n = 30$ で **1073741823** 個になる（第2節）。第二に、一秒に十億項を足せるとしても、 $n = 60$ では **36.53** 年かかる（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。偶数項で切れば必ず真値より大きく、奇数項で切れば必ず小さい（第3節）。第四に、挟み幅は $1/(k+1)!$ で縮む。 $k = 5$ と $k = 6$ の差は $0.001388889 = 1/6!$ である（第3節）。第五に、 $k = 12$ で真値 $1/e = 0.3678794412$ との差は 1.4980×10^{-10} になる（第3節）。第六に、分離子は「項が交代するか」であって、項の数ではない（第5節）。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——包除原理・ボンフェローニ不等式・攪乱順列はすべて既知である。組合せ論を作らない——ボンフェローニ不等式の一般的な証明には立ち入らない。名前を挙げるにとどめる。計算量理論を作らない——永久和（パーマネント）の計算困難性やその近似計算には立ち入らない。名前を挙げるにとどめる。実装を扱わない——浮動小数の丸めや大きな数の扱いは主題ではない。確率論を作らない——ポアソン近似の誤差評価には立ち入らない。一般化しない——「厳密な式は切れば使える」を一般則として主張しない。項が交代しない式では成り立たない。既刊との関係：論文354は長さが曲線を測る量でなくなることを示した——そこでは発散が物差しの取り違えだった。ここでは項数の爆発が計算法の取り違えである。論文353は最適値が端ではなく中間にあることを示した——そこでも「多いほどよい」が誤りだった。ここでは項を全部足すより途中で切るほうがよい。論文300は同根か別根かが判定できることを示した——「厳密である」と「計算できる」は、その基準で別根である。論文357は同じ式が二つの最適解をもつことを示した——ここでは同じ式が使えなくも使えるようになる。加えたのは、項数の爆発を六点で時間に換算したこと、打ち切りが交互に上下から挟むことを十三点で示したこと、挟み幅が $1/(k+1)!$ に厳密に一致することを確認したこと、独立に知られた値（ $n=4$ の攪乱順列は9通り）で自己検査したこと、分離子を「項が交代するか」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定： n 個の集合の合併の大きさを包除原理で書く。

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$$

右辺の項の数は空でない部分集合の数、すなわち $2^n - 1$ 個である。

観察 1.1

この式は近似ではない。等号であって、誤差項が無い——数学的には完全な答である。

観察 1.2

だが項の数は n の指数関数である。 n が 1 増えるごとに倍になる——完全な答が、書き下せない長さになる。

観察 1.3

符号が交代することに注目する。 $(-1)^{|S|+1}$ ——この交代が、第3節で救いになる。

問い：厳密であれば、使えるのか。

2. 項の数は $2^n - 1$ である

計算 2.1：項の数と、一秒に十億項を足せるとしたときの所要時間（本稿で計算）。

n	項の数 $2^n - 1$	所要時間
10	1023	0.0000 秒
20	1048575	0.0010 秒
30	1073741823	1.0737 秒
40	1099511627775	0.31 時間
50	1125899906842623	13.03 日
60	1152921504606846975	36.53 年

観察 2.2

n を 10 増やすと項数はちょうど 1024 倍になる。 $2^{10} = 1024$ だからである——実測でも 1024.000976 倍。 -1 の効果しか残らない。

観察 2.3

$n = 30$ と $n = 60$ の間に境目がある。1.0737 秒から 36.53 年へ——集合が三十個増えただけで、待てるものが待てないものになる。

観察 2.4

$n = 60$ は大きな数ではない。条件が六十個ある、というだけである——実務ではありふれた規模で、厳密な公式が届かなくなる。

観察 2.5

計算機を速くしても解決しない。十億倍速くしても n が 30 増えるだけである——指数の相手に線形の改善は効かない。

3. 切ると、上下から挟む

計算 3.1：攪乱順列の確率を項の数 k で打ち切ったときの値（本稿で計算・真値は $1/e = 0.3678794412$ ）。

k	部分和	真値との差	位置
0	1.0000000000	$+6.321 \times 10^{-1}$	上
1	0.0000000000	-3.679×10^{-1}	下
2	0.5000000000	$+1.321 \times 10^{-1}$	上
3	0.3333333333	-3.455×10^{-2}	下
4	0.3750000000	$+7.121 \times 10^{-3}$	上
5	0.3666666667	-1.213×10^{-3}	下
6	0.3680555556	$+1.761 \times 10^{-4}$	上
7	0.3678571429	-2.230×10^{-5}	下
8	0.3678819444	$+2.503 \times 10^{-6}$	上
12	0.3678794413	$+1.4980 \times 10^{-10}$	上

観察 3.2

これが本稿の芯である。偶数で切れば必ず上、奇数で切れば必ず下である——例外が一つもない。だから隣り合う二つを取れば、真値を挟む区間が手に入る。

観察 3.3

挟み幅は階乗で縮む。 $k = 5$ と $k = 6$ の差は 0.0013888889 ——これは $1/6! = 0.0013888889$ に厳密に一致する。

観察 3.4

十三項で十桁近い。 $k = 12$ の残差は 1.4980×10^{-10} —— $2^{60} - 1$ 個ではなく、13 個で済んでいる。

観察 3.5

ここに逆転がある。全部足すと 36.53 年、途中で切ると一瞬で十桁——全部足すことが最善ではない。論文353 で最適値が中間にあったのと同じ形である。

観察 3.6

独立な既知値で検算できる。 $k = 4$ までの部分和に $4!$ を掛けると 9—— $n = 4$ の攪乱順列が 9 通りであることは独立に知られている。式が正しく閉じている。

4. なぜ挟めるのか

観察 4.1

項が交代し、かつ絶対値が単調に減るからである。 $1/k!$ は k とともに単調に減る——この二条件だけで、部分和が真値を交互に挟むことが従う。

観察 4.2

条件はどちらも必要である。交代しなければ挟まず、減らなければ収束しない——片方を落とすと主張は偽になる。

観察 4.3

一般の包除原理では第二条件が保証されない。集合の交わりの大きさが単調に減るとはかぎらない——だからボンフェローニ不等式は「挟む」ことは言うが、「幅が階乗で縮む」とは言わない。

観察 4.4

つまり二つの主張の強さが違う。「上下から挟む」は一般に成り立つ——「十三項で十桁」は攪乱順列という具体例の性質である。混ぜない。

観察 4.5

正直に言えば——本稿はボンフェローニ不等式を証明していない。示したのは一つの例で実際に挟むことと、その幅の値である——一般の証明は文献に譲る。

5. 分離子：項が交代するか

観察 5.1

分離子——項が符号を交代するかどうかであって、項の数ではない。

	項の符号	打ち切ると	誤差の向きは分かるか
包除原理	交代する	上下から挟む	分かる
同符号の和	同じ	常に下から	片側だけ

観察 5.2

右端の列が実用の差である。同符号の和を途中で切ると「まだ足りない」ことしか分らない——交代する和なら「どこまでのあいだにある」が分かる。

観察 5.3

項数の多さは分離子ではない。 2^{60} 項でも、交代していれば十三項で十桁出る——多いことが困難の原因ではなく、符号がそろっていることが原因である。

観察 5.4

分離子は動かせる。同符号の和でも、上界の列を別に作れば挟める——ただしその列は式の外から持ってくることになる。交代する和は、それを式の内側でやっている。

観察 5.5

正直に言えば——36.53 年も 1.4980×10^{-10} も、一秒に十億項という仮定と攪乱順列という例の上での値である。別の問題なら別の数が出る——動かないのは、項数が $2^n - 1$ であることと、交代和が上下から挟むことだけである。

観察 5.6

最後に一つ——「厳密である」は「使える」を意味しない。そして使えるようにする操作は、たいてい厳密さを捨てる操作ではない——ここでは、厳密な式を途中で止めるだけで、答が挟まれた区間として手に入る。捨てたのは項であって、確からしさではない。

6. 点呼と結び

1. 項の数は $2^n - 1$ (第1節) : 等号であって近似ではない。
2. $n = 30$ で 1073741823 個 (計算 2.1) : 1.0737 秒。
3. $n = 60$ で 36.53 年 (計算 2.1) : 三十増えただけで待てなくなる。

4. n を 10 増やすと 1024 倍 (観察 2.2) : 2^{10} 。
5. 偶数で切れば上、奇数なら下 (観察 3.2) : 例外が一つもない。
6. $k = 5$ と $k = 6$ の差は $1/6!$ (観察 3.3) : 0.0013888889。
7. $k = 12$ で残差 1.4980×10^{-10} (計算 3.1) : 13 項で十桁近い。
8. $4!$ を掛けると 9 (観察 3.6) : 独立に知られた値と一致。
9. 交代と単調減少の両方が要る (観察 4.2) : 片方では成り立たない。
10. 項数は分離子ではない (観察 5.3) : 符号がそろっていることが原因。

結び：包除原理は近似ではない——等号であって誤差項が無く、数学的には完全な答である。だが項の数は $2^n - 1$ 個で、 n の指数関数である——一秒に十億項を足せるとしても、 $n = 30$ なら 1.0737 秒だが $n = 60$ では 36.53 年かかる。集合が三十個増えただけで、待てるものが待てないものになる。しかも $n = 60$ は「条件が六十個ある」というだけの、実務ではありふれた規模である。計算機を十億倍速くしても n が 30 増えるだけで、指数の相手に線形の改善は効かない。ところが、途中で切ると上下から挟める——攪乱順列の確率で見ると、偶数項で切れば必ず真値 $1/e = 0.3678794412$ より大きく、奇数項で切れば必ず小さい。例外が一つもない。だから隣り合う二つを取れば、真値を挟む区間が手に入る。挟み幅は階乗で縮み、 $k = 5$ と $k = 6$ の差 0.0013888889 は $1/6!$ に厳密に一致する。 $k = 12$ での残差は 1.4980×10^{-10} —— $2^{60} - 1$ 個ではなく 13 個で十桁近い。ここに逆転がある——全部足すと 36.53 年、途中で切ると一瞬で十桁。全部足すことが最善ではない。挟めるのは、項が交代し、かつ絶対値が単調に減るからであって、この二条件はどちらも必要である。一般の包除原理では第二条件が保証されないので、「上下から挟む」は一般に成り立つが「十三項で十桁」は攪乱順列という具体例の性質である。混ぜない。分けているものは一つ——項が符号を交代するかどうかであって、項の数ではない。同符号の和を途中で切ると「まだ足りない」ことしか分からないが、交代する和なら「どこまでのあいだにある」が分かる。 2^{60} 項でも交代していれば十三項で十桁出ののだから、多いことが困難の原因ではなく、符号がそろっていることが原因である。正直に言えば——本稿はボンフェローニ不等式を証明していない。示したのは一つの例で実際に挟むことと、その幅の値である。36.53 年も 1.4980×10^{-10} も、一秒に十億項という仮定と攪乱順列という例の上での値である。最後に一つ——「厳密である」は「使える」を意味しない。そして使えるようにする操作は、たいてい厳密さを捨てる操作ではない。ここでは、厳密な式を途中で止めるだけで、答が挟まれた区間として手に入る。捨てたのは項であって、確からしさではない。

参考文献

-
1. Bonferroni, C. E. (1936). Teoria statistica delle classi e calcolo delle probabilità. *Pubblicazioni del R. Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Firenze*.
 2. Stanley, R. P. (2011). *Enumerative Combinatorics, Volume 1* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
 3. Comtet, L. (1974). *Advanced Combinatorics*. Dordrecht: Reidel.
 4. Galambos, J., Simonelli, I. (1996). *Bonferroni-type Inequalities with Applications*. New York: Springer.

5. Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics* (2nd ed.). Reading: Addison-Wesley.
6. 山岸勇輝 (2026). 『第三百回の点呼——同根か別根かは判定できる』 [論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
7. 山岸勇輝 (2026). 『雑音を足すと検出が良くなる場合がある——ただし「多いほどよい」ではない』 [論文353]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22696835
8. 山岸勇輝 (2026). 『長さは、曲線を測る量ではなくなることがある』 [論文354]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22696977
9. 山岸勇輝 (2026). 『最大の電力と最大の効率、同じ点にない』 [論文357]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22697180

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)