

感度をどこかで下げると、どこかで必ず上がる

— $\int_0^\infty \ln |S| d\omega$ は K を変えても 0 のままである（実測 $-0.006114 \cdot -0.006239 \cdot -0.006489$ ） — 下げた側の面積 **0.822619** と上げた側の面積 **0.854584** が釣り合う — 制御の改善は移動であって、生成ではない — [論文367]

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan | 山岸勇輝ラボ

2026年9月

— *From thinking to syncing.* —

要旨

制御を強くすれば外乱に強くなる、と考えたくなる。本稿が問うのは強くした分だけ得をするかである——答えは得た分と失った分が、面積として釣り合う。新しい定理も法則も主張しない。第一に、感度関数 $S = 1/(1 + L)$ の対数の積分は、 K を変えても 0 のままである（第2節）。第二に、実測で $K = 0.5 \cdot 1.0 \cdot 2.0$ に対して $-0.006114 \cdot -0.006239 \cdot -0.006489$ である（第2節）。第三に、これが本稿の芯である。 $|S| < 1$ の側の面積 **0.822619** と $|S| > 1$ の側の面積 **0.854584** が釣り合う（第3節）。第四に、どの K でも 1 を超える山が立ち、 $K = 2.0$ では **1.785405** になる（第3節）。第五に、制約のない関数で同じ積分を取ると -724.161025 になり、 0 から大きく外れる（第4節）。第六に、分離子は「相対次数と不安定極」であって、制御則の巧拙ではない（第5節）。

本稿の射程（射程注記）：新しい定理も法則も主張しない——ボードの感度積分・感度関数・ウォーターベッド効果はすべて既知である。制御理論を作らない——ボードの積分定理の証明（複素解析による）には立ち入らない。名前を挙げるにとどめる。不安定極を扱わない——右半平面の極があるときの一般形（ $2\pi\sum \text{Re} p_i$ ）は名前を挙げるにとどめる。本稿は極が右半面に無い場合だけを計算する。設計法を与えない——どこに山を置くべきかという設計指針は与えない。離散を扱わない——標準化した系の対応する制約は主題ではない。実装を扱わない——数値積分の打ち切り誤差は明示するが、精度の理論は与えない。既刊との関係：論文350 はむだ時間が位相だけを食うことを示した——そこでも制御の限界が主題だった。ここでは限界が保存則の形をとる。論文357 は最大電力と最大効率が同じ点にないことを示した——そこでも二つを同時に取れなかった。論文300 は同根か別根かが判定できることを示した——「制御が下手だから山が立つ」と「原理的に立つ」は、その基準で別根である。論文353 は最適値が端ではなく中間にあることを示した——ここでは総量が固定され、配分だけが選べる。加えたのは、三つの K で積分値を数に出したこと、下げた面積と上げた面積を別々に出して釣り合いを見たこと、山の高さが K とともに上がることを示したこと、制約のない関数を対照に置いて検査が効くことを確かめたこと、分離子を「相対次数と不安定極」に置いたことである。

1. 記法と問い

設定：一巡伝達関数を $L(s) = K/(s(s+1))$ とし、感度関数を次で定める。

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}, \quad \int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = 0$$

右半平面に極が無く、相対次数が 2 以上のときの、ボードの積分定理である。

観察 1.1

$|S|$ が小さいほど外乱に強い。 S は外乱から出力への伝達だからである——低周波で $|S|$ を下げるのが、制御の目的である。

観察 1.2

だが積分が 0 に固定されている。 $\ln |S|$ の積分——どこかを負にすれば、どこかを正にしなければならない。

観察 1.3

これは制御則の巧拙とは関係がない。 L の形によらず、相対次数と極の位置だけで決まる——上手に設計しても回避できない。

問い：制御を強くした分だけ、得をするか。

2. 積分は K を変えても 0 である

計算 2.1： K に対する感度積分と山の高さ（本稿で計算・ ω は 0 から 4000 まで、 4×10^6 分割）。

K	$\int \ln S d\omega$	最大の $ S $	その周波数
0.5	−0.006114	1.272019	0.899
1.0	−0.006239	1.467890	1.169
2.0	−0.006489	1.785405	1.554

観察 2.2

三つとも 0 に近い。−0.006 前後—— K を四倍にしても積分は動かない。

観察 2.3

正直に言えば——残っている −0.006 は打ち切り誤差である。定理が言うのは無限区間の積分だが、本稿は $\omega = 4000$ で切っている——0 ちょうどでない理由を、モデルの粗さとして明示しておく。

観察 2.4

だが山の高さは K とともに上がる。1.272019 から 1.785405 へ——積分は動かないのに、配分は動いている。

観察 2.5

山の位置も動く。 $\omega = 0.899$ から 1.554 へ——強くするほど、山が高周波側へ移る。

3. 下げた面積と上げた面積が釣り合う

計算 3.1 : $K = 1.0$ で、 $|S|$ が 1 より小さい側と大きい側の面積を別々に出す（本稿で計算）。

量	値
$ S < 1$ の側の面積（得たぶん）	0.822619
$ S > 1$ の側の面積（失ったぶん）	0.854584
差	0.031965 （面積の 3.89 パーセント）

観察 3.2

これが本稿の芯である。二つの面積が **3.89** パーセント以内で一致する——低周波で下げた分は、高周波で上がった分とほぼ同じである。

観察 3.3

正直に言えば——この **3.89** パーセントも数値積分の粗さである。面積の計算は分割を粗くしてある——細かくした計算 2.1 では差が **0.006** まで縮む。

観察 3.4

つまり制御の改善は移動である。どこかで良くすることは、どこかで悪くすることと同義である——「全周波数で良くする」は、この定理の下では不可能である。

観察 3.5

$|S| > 1$ は「外乱が増幅される」ことを意味する。何もしないより悪い帯域が、必ずできる——制御をかけたせいで振動が出る、という現場の経験は、これである。

観察 3.6

論文357 と同じ形である。論文357 では最大電力と最大効率が同じ点になかった——ここでは、低周波の性能と高周波の性能が同じ設計で取れない。

4. 制約のない関数と比べる

計算 4.1：対照として、感度関数でない関数の対数積分を取る（本稿で計算）。

対象	$\int \ln(\cdot) d\omega$
感度関数 S ($K = 1.0$)	-0.006239
$1/(1 + \omega^2)$ (制約なし)	-724.161025

観察 4.2

対照は 0 から大きく外れる。**-724.161025**——「積分が 0 になった」が、たまたまではないことの確認になる。

観察 4.3

この対照が無ければ、検査は失敗しようがない。どんな数でも「0 に近い」と言えてしまう尺度なら、意味がない——**-724** という値が出る尺度で **-0.006** が出たことに、意味がある。

観察 4.4

$1/(1 + \omega^2)$ は単調に減る。どこにも山が立たない——だから積分は負に大きくなる。制約があるとは、山が立つことと同じである。

5. 分離子：相対次数と不安定極

観察 5.1

分離子——相対次数が 2 以上か、右半平面に極があるかであって、制御則の巧拙ではない。

条件	積分の値	山は
相対次数 ≥ 2 ・不安定極なし	0	必ず立つ
右半平面に極 p_i あり	$2\pi \sum \text{Re} p_i > 0$	さらに高くなる

観察 5.2

下の行は本稿が計算していない。文献として挙げるにとどめる——本稿が数で出したのは上の行だけである。主張の強さを混ぜない。

観察 5.3

分離子は動かせるが、代償がある。相対次数を 1 にすれば積分は 0 でなくなる——だがそれは高周波で $|L|$ が落ちないことを意味し、実装できない。

観察 5.4

つまり制約は物理から来ている。現実の系は必ず高周波で応答が落ちる——相対次数 2 以上は、避けられる条件ではない。

観察 5.5

正直に言えば——**0.822619** も **1.785405** も、 $L = K/(s(s+1))$ と明示した系の上での値である。別の系なら別の数が出る——動かないのは、積分が **0** に固定されるという構造だけである。

観察 5.6

最後に一つ——保存則が課された量では、「改善」という語が意味を変える。総量が動かないのだから、改善とは配分の選択である——どこを良くするかを選んだ人は、同時にどこを悪くするかを選んでいる。選んだ覚えがなくても、そうになっている。

6. 点呼と結び

1. $\int \ln |S| d\omega = 0$ (第1節)：相対次数 **2** 以上・不安定極なし。
2. $K = 0.5$ で **-0.006114** (計算 2.1)：実測。
3. $K = 2.0$ でも **-0.006489** (計算 2.1)： K を四倍にしても動かない。
4. 残差は打ち切り誤差 (観察 2.3)： $\omega = 4000$ で切っている。
5. 山は **1.272019** から **1.785405** へ (計算 2.1)：配分だけが動く。
6. 山の位置も **0.899** から **1.554** へ (観察 2.5)：高周波側へ移る。
7. 下げた面積 **0.822619** (計算 3.1)：得たぶん。
8. 上げた面積 **0.854584** (計算 3.1)：失ったぶん。差は **3.89** パーセント。
9. 対照は **-724.161025** (計算 4.1)：検査が効いている。
10. 相対次数を **1** にはできない (観察 5.3)：制約は物理から来る。

結び：制御を強くすれば外乱に強くなる、と考えたくなる——だが強くした分だけ得をするわけではない。感度関数 $S = 1/(1+L)$ の対数の積分は、**0** に固定されている——右半平面に極が無く相対次数が **2** 以上なら、 $\int_0^\infty \ln |S| d\omega = 0$ である。実測でも $K = 0.5 \cdot 1.0 \cdot 2.0$ に対して **-0.006114**・**-0.006239**・**-0.006489** で、 K を四倍にしても積分は動かない (残っている **-0.006** は $\omega = 4000$ で切ったことによる打ち切り誤差である)。動くのは配分だけである——山の高さは **1.272019** から **1.785405** へ上がり、位置も $\omega = 0.899$ から **1.554** へ移る。そして $K = 1.0$ で $|S| < 1$ の側の面積 **0.822619** と $|S| > 1$ の側の面積 **0.854584** が、**3.89** パーセント以内で釣り合う (この差も粗い分割によるもので、細かく取れば **0.006** まで縮む)。つまり制御の改善は移動であって、生成ではない——どこかで良くすることは、どこかで悪くすることと同義であり、「全周波数で良くする」はこの定理の下では不可能である。 $|S| > 1$ は外乱が増幅されることを意味するので、何もしないより悪い帯域が必

ずできる。制御をかけたせいで振動が出るという現場の経験は、これである。対照を置けば、この **0** がたまたまでないと分かる——同じ積分を $1/(1+\omega^2)$ に取ると **-724.161025** になる。**-724** という値が出る尺度で **-0.006** が出たことに、意味がある。 $1/(1+\omega^2)$ はどこにも山が立たないから積分が負に大きくなるのであって、制約があるとは山が立つことと同じである。分けているものは一つ——相対次数が **2** 以上か、右半平面に極があるかであって、制御則の巧拙ではない。相対次数を **1** にすれば積分は **0** でなくなるが、それは高周波で応答が落ちないことを意味し、実装できない。制約は物理から来ている。右半平面に極がある場合の一般形は本稿が計算しておらず、文献として挙げるにとどめる。正直に言えば——**0.822619** も **1.785405** も $L = K/(s(s+1))$ と明示した系の上での値であり、動かないのは積分が **0** に固定されるという構造だけである。最後に一つ——保存則が課された量では、「改善」という語が意味を変える。総量が動かないのだから、改善とは配分の選択である。どこを良くするかを選んだ人は、同時にどこを悪くするかを選んでいる。選んだ覚えがなくても、そうになっている。

参考文献

1. Bode, H. W. (1945). *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. New York: Van Nostrand.
2. Freudenberg, J. S., Looze, D. P. (1985). Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
3. Stein, G. (2003). Respect the Unstable. *IEEE Control Systems Magazine*.
4. Skogestad, S., Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable Feedback Control* (2nd ed.). Chichester: Wiley.
5. Åström, K. J., Murray, R. M. (2008). *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton: Princeton University Press.
6. 山岸勇輝 (2026). 『第三百回の点呼——同根か別根かは判定できる』[論文300]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22171914
7. 山岸勇輝 (2026). 『むだ時間は、振幅に触れずに安定余裕だけを食う』[論文350]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22695565
8. 山岸勇輝 (2026). 『雑音を足すと検出が良くなる場合がある——ただし「多いほどよい」ではない』[論文353]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22696835
9. 山岸勇輝 (2026). 『最大の電力と最大の効率、同じ点にない』[論文357]. Zenodo. 10.5281/zenodo.22697180

— *From thinking to syncing.* —

山岸 勇輝 (Yuuki YAMAGISHI)

© 2026 Yamagishi Complexity Torus Lab, Japan · Licensed under Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)